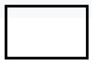
# INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES MATEMÁTICAS YA LA GEOMETRÍA ANALÍTICA.

***Salvatore Leo Incarbone***

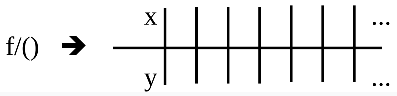
**Introducción: el concepto de función.**
Imaginemos que queremos tratar con una calculadora de escritorio que representamos con una caja, mostrada con un rectángulo.



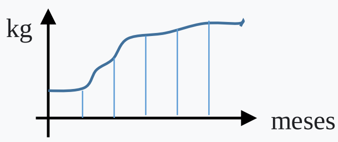
En esta máquina digitamos cualquier número y una o más funciones de cálculo expresadas con símbolos adecuados u otros números operativos.
La máquina se pondrá en marcha [lo que indicamos con f ()] después de un comando adecuado y proporcionará un resultado numérico y que depende tanto del número presentado en la entrada a la máquina como de la función asignada.

x ➔ $\boxed{\text{f ()}}$ ➔ y Se entiende que la máquina hace y da y = f (x)

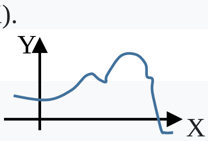
Representamos todo esto con un número de variable X que ***no*** depende de la máquina sino de nuestra elección independiente y por lo tanto se llama "variable independiente", (es decir, ***independiente*** de la máquina) y dispara la función f (x).
El resultado Y, en cambio, depende del cálculo realizado, es decir, tanto de X, que es la ***variable de entrada independiente***, como de la ***función f ()*** realizada por la máquina y, por lo tanto, Y se denomina ***variable de salida dependiente***.
Eventualmente podremos memorizar todo el procedimiento y sus posibles repeticiones con una tabla de dichos valores.




en las casillas reservadas para X pondremos los valores escritos cada vez que se elija esta variable independiente; en el recuadro correspondiente de abajo pondremos el valor de la variable dependiente Y calculada según la operación f() de la máquina.
Como alternativa adicional, podríamos representar los valores de X en una ***línea recta*** llamada "***eje X***", equipada con una unidad de medida adecuada u y una dirección positiva (indicada, por ejemplo, con una flecha).
A modo de ejemplo, si queremos comprobar la funcionalidad de crecimiento de un niño mes a mes, nuestra unidad de medida será el mes en un eje temporal o meses adecuados. El tiempo es la variable independiente, y hasta tal punto que fluye sin dar - ni siquiera a nosotros - ninguna posibilidad de elección.
La variable dependiente podría ser entonces el peso del cuerpo en gramos y lo indicamos en un eje correspondiente de la variable dependiente "peso", extendido perpendicularmente al primer eje (el de los meses se hubiera elegido por ejemplo horizontal). Este nuevo eje de peso será entonces vertical; la unidad de medida -marcada por dos muescas que la delimitan- puede ser el kg y el eje también puede dividirse en muescas; el peso será la variable dependiente tanto de la alimentación suministrada como de la función global que tiene el organismo y se manifiesta con el crecimiento, pero se evaluará en relación al tiempo que discurre de forma independiente.



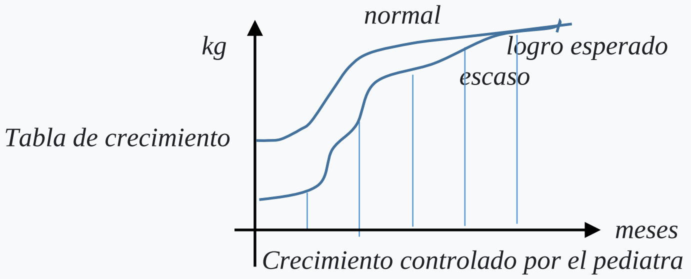

En "análisis matemático" surge así el concepto de "función" en el que se tiene en cuenta la variable independiente X establecida por nuestra elección, de una función o "función" f() que representa el procesamiento realizado sobre X, y de un resultado que "Dependiendo" de todo esto, se llama "variable dependiente" Y.
Todo esto se simboliza con la expresión Y = f (X).



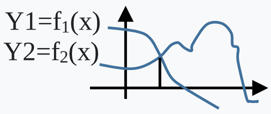

La representación con los dos ejes se denomina "Gráfico cartesiano en el plano" o "Sistema de referencia cartesiano".

**El caso de múltiples funciones que se encuentran en un punto común.**
Supongamos que queremos representar varias funciones en el mismo gráfico.

Por ejemplo, puede ocurrir que queramos saber si un niño con bajo peso que crece muy poco podrá alcanzar el peso normal y cuándo.
En base a las mediciones realizadas, podríamos esperar hacer algunas predicciones, pero en general es difícil ser precisos en este sentido, sobre todo porque se necesita una visión de conjunto de las dos tendencias, la normal y la tardía, para poder ser capaz de compararlos útilmente.
Esto es posible con procedimientos de geometría analítica que hacen uso de gráficos. Para obtener una comparación que sea lo más predecible posible, representamos las dos tendencias en el mismo sistema de referencia.



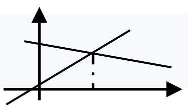

Por encima de la tendencia normal, bajar la curva de tendencia de infraponderación.Así entendemos la ventaja de representar dos funciones diferentes en el mismo gráfico para evaluar su punto de encuentro o compararlas.
En general, si tenemos dos funciones distintas Y1 = f1 (X) e Y2 = f2 (X) de las cuales queremos saber para cuál X las dos variables dependientes Y1 e Y2 serán iguales entre sí, es conveniente representar en el mismo plano cartesiano,
Se notará inmediatamente que esta relación de igualdad Y1 = Y2 tiene importancia cuando se da para un valor dado de X ya que esta coincidencia indica un punto de intersección entre las dos curvas.
En el plano cartesiano esto equivale a encontrar el ***<u>punto de encuentro común</u>*** de las gráficas de las dos funciones $f_1$ (X) e $f_2$ (X).



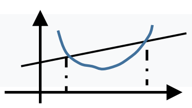

Si las dos funciones se dan algebraicamente, es decir, con operaciones de cálculo independientes para cada una de las dos funciones $f_1$ (X) et $f_2$ (X), entonces el sistema resuelve el problema:

$$\begin{cases} Y_1 = f_1(X) \\ Y_2 = f_2(X) \end{cases}$$

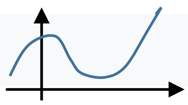
de hecho el sistema se resuelve cuando un valor bien determinado de X, sustituido en $f_1$ (X) y $f_2$ (X), da el mismo resultado $f_1$ (X) = $f_2$ (X), es decir cuando se da la relación $Y_1 = Y_2$ para el misma abscisa X. Entonces en un ***punto común***.
En la gráfica esto corresponde al punto de intersección de las gráficas de las dos funciones, es decir, su punto común.
De hecho, encontrar los puntos comunes de dos (o más) funciones equivale al problema de resolver el sistema de funciones correspondientes (ecuaciones) que representan las mismas funciones.
Puede haber varios casos dependiendo del número de soluciones que es el número de puntos de intersección.



a. Una sola solución (primer grado)



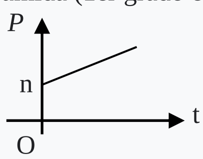
b. Dos soluciones (II° grado)



c. Tres soluciones (III° grado)

**El grado**.
Nótese que la relación más simple entre las variables es la llamada "lineal" o de "primer grado". El grado se define como el máximo exponente de una función expresada con un polinomio.
Si p. ex. queremos describir numéricamente con una ecuación el aumento de peso del cuerpo de un niño en función del tiempo, la forma más sencilla de hacerlo es imaginar la relación resumida (1er grado en P, t):

$$P = kt + n$$




*Para t = 0 tenemos el peso al nacer n*

Los símbolos indican: p = peso en gramos, t = tiempo en meses (1, 2, 3, ...), k = tasa de crecimiento promedio en "gramos en un mes", n = peso inicial (por ejemplo, al nacer o al principio del mes o en la fecha del último pesaje). En lugar de

hablar de cada cambio mínimo en el peso durante el mes, generalmente damos el cambio general que ocurrió durante un cierto período de tiempo. Esta evaluación se llama "tasa de crecimiento" y se nos presenta como la relación k entre el peso y el tiempo; precisamente k = (P-n) / t = peso actual P, menos el peso inicial n (al nacer o al principio del mes), en relación al lapso de tiempo t. La relación se hace con la división.
El gráfico es un segmento de línea y la relación es una ecuación de primer grado. Con esto simplemente queremos decir que la variable independiente (tiempo), y la variable dependiente también, aparecen como potencias con un exponente unitario.
Una relación de segundo grado es p. ex. la que existe entre el lado L de un cuadrado y su área A. La función es entonces: A = L2.

| Lado L | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| Area A | 0 | 1 | 4 | 9 | ... |

Los pares de coordenadas en los que L actúa como abscisa y A como ordenada, es decir, del tipo (L; A), son (0; 0), (1; 1), (2; 4), (3; 9 ).


*En el gráfico de la izquierda se utiliza una unidad de medida común en los dos ejes, en el de la derecha las unidades son diferentes para ver mejor la curvatura.*

Colocando los valores obtenidos en el sistema de referencia cartesiano, y conectándolos con una línea curva, vemos que se obtiene una forma curvilínea. En realidad, es una forma curva que se llama ***parábola***.
La relación A = L2 ahora se considera de "segundo grado" ya que la variable independiente "lado L" elevada al cuadrado, aparece como una potencia con exponente 2. Para esta relación, dado que el área A es muy creciente con la variación del lado, es preferible utilizar diferentes unidades de medida en los dos ejes para apreciar mejor la tendencia de la curvatura. Esto se ve en el gráfico de la derecha.

**Notas introductorias sobre la parábola y la circunferencia.**
En general, las relaciones de segundo grado como: y = ax2 + bx + c, pueden incluir términos de primer grado (como en $bx = bx^1$) y términos de grado cero (como en $c = cx^0 = c.1 = c$) y por lo tanto presentes como un trinomio completo de segundo grado.
Se muestra que este trinomio corresponde a una gráfica con tendencia parabólica y que su representación es una parábola con forma de "U" (recta o invertida según el signo del primer coeficiente "a"), cuya apertura y el posicionamiento dependen de los coeficientes b y c.
El eje X "tiene ecuación" Y = 0 ya que en cualquier punto del eje X, la ordenada Y es de valor nulo.
Consideremos ahora el sistema de las dos ecuaciones de una parábola y de la recta "eje x, o sea Y = 0": (Considerar o colocar dos ecuaciones en un sistema implica "indicarlas juntas" con una llave; viceversa viceversa unir dos ecuaciones con una llave significa buscar aquellas soluciones que satisfagan ambas al mismo tiempo).

$$\begin{cases} Y = ax^2 + bx + c & \text{(parábola)} \\ Y = 0 & \text{(línea recta del eje x)} \end{cases}$$

Para resolver el sistema, usamos y reemplazamos Y = 0 en la ecuación del trinomio y tenemos:

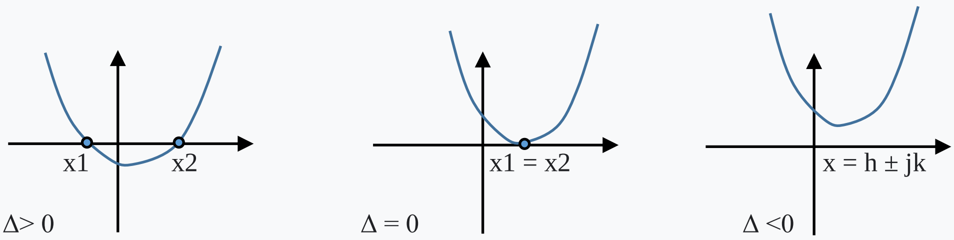
$$ax^2 + bx + c = 0$$

que, resuelto, da dos valores para x, a saber, $x_1$, $x_2$.
Sabemos que las soluciones deben indicar puntos comunes a las dos “curvas” (incluso una recta se considera curva aunque particular) es decir, comunes a la parábola y a la recta, es decir, deben proporcionar los puntos de intersección entre las dos curvas. También sabemos que las dos soluciones del trinomio dependen del valor del discriminante Δ, (definido por $\Delta=b^2-4ac$) en el sentido de que:

1. si Δ> 0 hay dos soluciones reales y distintas $x_1$ y $x_2$
2. si Δ = 0 hay dos soluciones reales y coincidentes $x_1 = x_2$
3. si Δ <0 tenemos dos soluciones complejas y conjugadas $x_1$ y $x_2$

Estas tres eventualidades se refieren a que la parábola puede tener tres modos de intersección con el eje x.
En el primer caso las intersecciones son dos diferentes, en el segundo caso las dos coinciden en un solo "doble punto" en el que el eje x es tangente a la parábola y en el tercer caso no hay intersección real y entonces los números complejos son

utilizado en el que aparecen los llamados números "imaginarios", destinados a indicar las raíces cuadradas de números negativos (imposibles en el campo "real"): tienen su origen en la definición: $j = \sqrt{(-1)}$. No podemos presentar la teoría aquí.

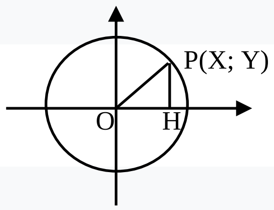



$\Delta > 0$ Dos soluciones reales y distintas

$\Delta = 0$ Dos soluciones reales y coincidentes

$\Delta < 0$ Dos soluciones "complejas conjugadas"

¿Todas las ecuaciones de grado II° son parábolas? No, de hecho consideramos la ecuación $X^2 + Y^2 = r^2$.
Inmediatamente veremos que se trata de una circunferencia descrita por un punto P (X,Y) a una distancia constante del origen O de los ejes.




Poniendo OP = r, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo tenemos en efecto: OH2 + PH2 = OP2 que es la ley geométrica del lugar "circunferencia".
Para pasar a la ley algebraica, basta referirse a las coordenadas de la referencia, observando que:

OH = Xabscisa de H e P
PH = Y ordenada de H e P
OP = r porque es el radio de la circunferencia.

Sustituyendo las letras X, Y, r en la ley geométrica, obtenemos la ley algebraica de la circunferencia con centro en el origen de los ejes y radio r:

$$\boxed{X^2 + Y^2 = r^2}$$

La ecuación de esta circunferencia es de segundo grado en X y Y además los coeficientes de estas dos potencias deben ser iguales entre sí. De lo contrario, como veremos, tendríamos una elipse.
La ecuación de la circunferencia con centro en cualquier punto del plano cartesiano es: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ en la que solo varían los parámetros a, b, c.

**Notas históricas y definición del sistema de referencia cartesiano**.
Hasta ahora hemos mencionado la utilidad práctica de utilizar el sistema de referencia cartesiano con dos ejes, abscisas y ordenadas.
Daremos un relieve teórico imprescindible para la comprensión del sistema y su uso teórico y práctico.
En primer lugar, es necesario enmarcar históricamente la invención de la geometría analítica para luego pasar a la exposición teórica a partir de la definición del sistema de referencia que constituye su esencia insustituible.
Todo esto se trata en "Geometría Analítica", artículo presentado en Psicopoiesi.it.

**Indice.**


.