

MATEMATICA
SPUNTI E TRUCCHI DIDATTICI

MATEMATICA. FRAZIONI, TRUCCHI DIDATTICI. 1

di

Salvatore Incarbone

Indice

Introduzione.

Frazioni

Possibile significato numerico della frazione.

L'uno frazionario.

Modo di moltiplicare le frazioni fa loro.

Regola del prodotto. Come nasce la regola.

Frazioni "finte" (non eseguibili).

Complicazione e Semplificazione.

Denominatore comune.

Procedimento generale per ricavare il m.c.m. (minimo comune multiplo).

Tabella "Ingressi/Uscita".

Procedimento a tabella per ricavare il M.C.D. (Massimo Comune Divisore).

Tabella didattica e Tabella pratica.

Introduzione.

Durante una vacanza al mare, una simpatica madre chiede come fare per spiegare le frazioni alla figlia che frequenta le scuole medie. Mostriamo qualche perplessità giacché ci sembrerebbe difficile spiegare una materia di questa importanza nel caso ci fosse verso di questa un rifiuto pregiudiziale. La donna protesta che la matematica l'affascina e la diverte e che non soffre di alcun rifiuto né di pregiudizi al riguardo. Così rassicurati, certi che i nostri sforzi non cadranno nel vuoto, passiamo allora a dare alle due donne alcune spiegazioni sul significato delle frazioni e facciamo degli esempi con litri di latte, parti di litro, con parti di euro e corrispondenti centesimi.

Ben presto tuttavia, agli esempi subentrano anche considerazioni teoriche che la signora, divertita, gusta con evidente soddisfazione, al punto che decidiamo di trascrivere queste "lezioni vacanze" a beneficio di chi, come le nostre allieve, madre e figlia, ha qualche difficoltà nel comprendere la materia ed anche a vantaggio di quei docenti che desiderano spunti nuovi e trucchi didattici per perfezionare ed ottenere maggiore rendimento, simpatia ed efficacia dalle proprie lezioni.

Il fatto è che qualsiasi materia ha bisogno non solo di logica consequenziale ma anche di una certa dose d'amore per essere sia insegnata che appresa. L'allievo apprende facilmente solo se si sente rispettato e amato e, come prima prova di ciò, il suo spirito esige che la spiegazione sia chiara, esauriente e collegata alla vita di tutti i giorni pena l'inquinamento da rifiuto a causa di frustrazione, astrusità e dogmatismo. Se non c'è piacere, resta e s'invoca il dovere. La conseguenza è che una materia così imparata è spesso subito dimenticata. Quando s'indirizzava una lettera ad un insegnante a volte si usava scrivere: "Al chiarissimo professore...". Ed è proprio quel "chiarissimo" che deve essere meritato.

Lo scritto fu vergato a mano, di getto, senza ripensamenti, con l'aiuto di un righello nella veranda della casetta davanti alla spiaggia. E' qui presentato nella sua forma originaria giacché mancava un computer per la stesura. Sebbene mostri l'origine disinvoltata di una spensierata vacanza al mare, concede idee nuove e piccoli trucchi che possono migliorare e perfezionare la didattica di una materia a volte difficile da insegnare e da imparare ma che - se compresa - ripaga risultando appassionante. Ciò che più conta, è che proprio con i piccoli trucchi qui descritti ed illustrati da vari esempi, si può così accelerare l'apprendimento dei giovani allievi annoiantoli e frustrandoli meno ed anzi divertendoli di più.

Facciamo un appello ad allievi, a genitori e soprattutto ai docenti di matematica affinché apprezzino il nostro sforzo e colgano ciò che a loro sembra più utile. Segnaliamo il concetto di "uno frazionario", la "tabella mcm" (minimo comune multiplo), la tabella MCD (Massimo Comune Divisore), l'uso di esempi con segmenti, il gioco delle sei palline ed altri spunti che il lettore accorto, magari docente, ci auguriamo trovi didatticamente interessanti, utili e divertenti, tali da suscitare interesse e simpatia per la propria materia.

A questo primo articolo seguirà "Matematica. Frazioni. Trucchi didattici. 2" con altri significati delle frazioni (p. e. quello di "rapporto") ed altri spunti e trucchi didattici.

FRAZIONI

Con il termine "frazione" s' intende una parte, o meglio, una porzione di qualcosa.
Del resto anche nel linguaggio comune frazione è p.e. una parte staccata dal paese.
Nella frazione dobbiamo mettemente distinguere il vero numero - il numeratore -
dalla parte - il denominatore.

Numeratore = ci dice quante parti ci sono. Numera le parti in gioco. (N)
Denominatore = denomina la parte; è il nome delle parti. (D)

$$F = \frac{N}{D}$$

"=" si legge "uguale a"

Pere e mele non si sommano. 3 pere e 2 mele restano 3 pere e 2 mele.
Sono di nome diverso. Così pure i denominatori diversi - essendo nomi -
non si possono sommare. 3 "quinti" e 2 "terzi" restano così, a meno che
si riesca a "trasformare" o "riconduere" le due frazioni a uno stesso
denominatore.

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} \quad \text{non si possono sommare. I denominatori sono } \neq$$

Come fare per avere denominatori uguali?

"≠" si legge "diverso da" o
"diversi fra loro"

Per rispondere a questa domanda conviene prima dire:

- Qual è il possibile significato numerico della frazione.
- Definire l'uno frazionario.
- Escogitare un modo per moltiplicare le frazioni fra loro.

POSSIBILE SIGNIFICATO NUMERICO DELLA FRAZIONE

Se di un litro di latte ne considero metà, posso dire che ne ho
preso 0,5 litri ovvero la metà $1/2$.

$$0,5 = 1/2 = \frac{1}{2} = 1:2$$

Vediamo così che il significato della frazione è un numero avvolte
decimale - con la virgola.

Di solito la frazione non indica un intero - come 1, 2, 3, ... - ma una
porzione, una (f)razione, una "razione" e perciò si dice che la fra-
zione indica un numero "razionale" - cioè con la eventuale virgola e che
sia risultato di un' operazione di divisione. (le cifre dopo la virgola pos-
sono essere infinite ma da un certo punto in poi si devono ripetere
periodicamente -

$$\frac{1}{2} \rightarrow 1:2 = 0,5 \quad \frac{1}{3} \rightarrow 0,3333\dots \quad \frac{1}{7} \rightarrow 0,142857142\dots$$

Se le cifre si ripetessero → caso, senza un periodo fisso, il numero
si direbbe "irrazionale".

L' UNO FRAZIONARIO.

È il numero 1 espresso da una frazione. Esempi: $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \dots, \frac{n}{n}$ con
n numero qualsiasi, intero o no.

Es.: $\frac{0,5}{0,5} = 1$ n può essere una frazione: si vede che: $\frac{0,5}{0,5} = \frac{1/2}{1/2} = 1$

Altri esempi: $\frac{3/4}{3/4} = 1$ $\frac{2/n}{2/n} = 1$ $\frac{1/5}{1/5} = 1$ $\frac{a}{a} = 1$ $\frac{0,5}{0,5} = \frac{1/2}{1/2} = 1$ $\frac{(2+3)}{(2+3)} = 1$

MODO DI MOLTIPLICARE LE FRAZIONI FRA LORO.

Notiamo ora che $1 \times 1 = 1$

Il primo 1 si può scrivere p.e. come $2/2$.

Il secondo 1 si può scrivere p.e. come $3/3$.

Il prodotto di queste due unità frazionarie deve fare 1. Infatti $\frac{2}{2} \times \frac{3}{3} = 1 \times 1 = 1$

Cioè:

$$\frac{2}{2} \times \frac{3}{3} = 1$$

Notiamo adesso che il prodotto dei numeratori è $2 \times 3 = 6$ e così pure il prodotto dei denominatori che è sempre $2 \times 3 = 6$.

Pertanto:

$$\frac{2}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{2 \times 3}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1$$

prodotto
di due frazioni

frazione
di due prodotti

Il risultato è giusto e quindi da qui, generalizzando nasce la regola del prodotto di due frazioni.

Nasce così la regola del prodotto di due frazioni.

Regola del prodotto. Come nasce la regola.

Il prodotto di due frazioni è uguale alla frazione dei prodotti (dei numeratori sui denominatori).

Esempio. Trovare la metà di un terzo.

Un terzo si scrive $1:3$ 1 diviso in 3 parti cioè $1/3$ (come frazione)

La metà si scrive "un mezzo di..." cioè $1/2$.

Come il "doppio di" 5 si scrive 2×5 così anche la metà di 5

si scrive $\frac{1}{2} \times 5 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{1} = \frac{1 \times 5}{2 \times 1} = \frac{5}{2}$

Allo stesso modo la metà di un terzo deve scriversi:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{6} \quad (\text{un sesto}).$$

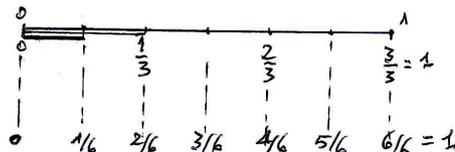
Verifica. Rappresentiamo 1 con un segmento che va da 0 a 1.



Per trovare $1/3$ del segmento dividiamolo in 3 parti uguali.



Consideriamo la parte che va da 0 a $1/3$ e dividiamola a metà. Dividiamo anche le altre due parti a metà.



In totale otteniamo 6 parti uguali cioè $6/6$ (Sei Sesti).

Dividendo a metà $1/3$ vediamo che si ottiene $1/6$.

Dunque è giusto che:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{ed è giusto moltiplicare i numeratori fra loro e così pure i denominatori fra loro.}$$

FRAZIONI "FINTE"
(non eseguibili)

Dobbiamo considerare "finte" - cioè non bene definite - quelle frazioni in cui il numeratore N o il denominatore D non sono un numero immediato vero e proprio ma indicati da operazioni di addizione o sottrazione o da espressioni che vanno prima risolte. Le operazioni fra frazioni finte restano sospese e non si possono dunque eseguire operazioni di qualsiasi tipo - p.e. moltiplicazione e divisione - se prima non si trova il vero numeratore o denominatore.

Esempio: $\frac{2+1}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{3 \times 5}{4 \times 2} = \frac{15}{8}$

Il numeratore 2+1 è "finto" e bisogna trovare quello "vero" che è 3. Va trovato prima di fare la moltiplicazione.

COMPLICAZIONE E SEMPLIFICAZIONE

Complicazione e semplificazione sono due operazioni opposte.

Come dice il nome stesso la complicazione fa diventare più grandi N o D oppure N e D. La semplificazione fa diminuire N e D.

Esempio $\frac{50}{100}$ non è altro che $\frac{1}{2}$ - infatti $\frac{50}{100}$ di Euro non sono che $\frac{1}{2}$ euro.

È evidente che "mezzo euro" - cioè $\frac{1}{2}$ - è più semplice di $\frac{50}{100}$.

Come si fa a "semplificare"?

Si può fare in due modi.

Un primo modo è di cercare di "vedere" in N e D l'uno frazionario. Cioè si può vedere facilmente se N e D sono uno il multiplo dell'altro.

Dunque qui 100 è il doppio di 50.

$$\frac{50}{100} = \frac{50}{2 \times 50} = \frac{1}{2} \times \frac{50}{50} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

↑
50 centesimi di euro = metà di un euro

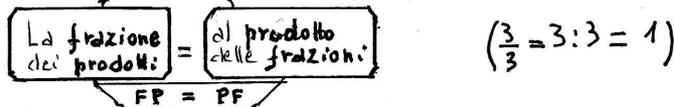
Non sempre tuttavia N e D sono l'uno un multiplo dell'altro.

Esiste allora un altro modo: infatti N e D pur non essendo multipli l'uno dell'altro possono "contenere" dei multipli.

Esempio:

$$\frac{6}{9} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

Qui abbiamo applicato la regola: "FP = PF" cioè:



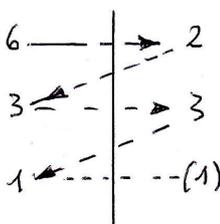
Non sempre i "multipli contenuti" (si chiamano fattori perché "fanno" il prodotto - p.e. $6 = 2 \times 3$; il 6 è "fatto" da 2×3 e 2 è anche 3, sono fattori) si vedono bene. Come trovarli? Si fa la "scomposizione".

Es.

$$\begin{array}{r} 6 | 2 \\ 3 | 3 \\ 1 \end{array}$$

Il 6 è pari perciò è divisibile per 2.
Il risultato è 3 che è divisibile per 3.
Ci si ferma a 1 - (1 è divisibile solo per 1)

$6 = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times 2$
Siccome è lo stesso, scrivere $3 \times 2 \times 1$ oppure 3×2 , il numero 1 di solito si omette.



Il fattore 1 compare in tutti i numeri interi. N e D sono numeri interi quindi contengono 1. Pertanto $\frac{N}{D} = \frac{n \times 1}{d \times 1} = \frac{n}{d} \times \frac{1}{1} = \frac{n}{d}$. L'1 non cambia nulla.

Le frecce indicano come eseguire la scomposizione in fattori (di 6 in questo caso) - Seguendo la traccia a zig-zag abbiamo:

Scrivo 6 a sinistra in alto. È pari, quindi divisibile per 2 che scrivo destra. Il 2 nel 6 c'è 3 volte che scrivo sotto il 6, a sinistra.

E così via. Lo zig-zag finisce quando si giunge a 1 a sinistra. I 1 tra parentesi perché non si scrive - (essendo superfluo).

La complicazione è più facile della semplificazione ma è molto utile anche se non se ne parla.

Basta moltiplicare la frazione per l'uno frazionario ben scelto ovvero moltiplicare N e D "per uno stesso numero" m (cioè la frazione per $1 = m/m$)

Esempio: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{50}{50} = \frac{50}{100}$ $\frac{50}{50} = 1$ frazionario.

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$$

↑
1 frazionario

La complicazione è utile quando si vuole cambiare il denominatore.

Esempio:

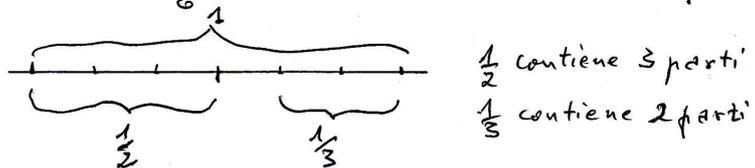
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ non si possono sommare perché qui si parla di cose diverse cioè di mezzi e di terzi.

Con la complicazione si può fare in modo di avere nomi uguali nei denominatori. Cioè:

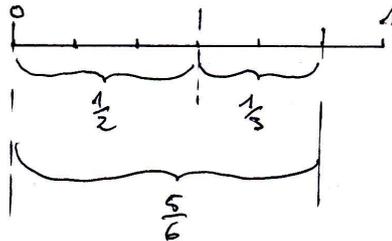
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Dunque è: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ Vediamo se è vero:

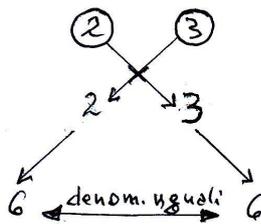
Dividiamo un segmento a metà, in tre e in sei parti.



$\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ insieme contengono 5 parti che sono "sesti", cioè $\frac{5}{6}$.



Si noti che per trovare lo stesso nome - denominatore comune, abbiamo moltiplicato i denominatori fra di loro. (2×3) ottenendo in un colpo solo un multiplo di entrambi.



Denominatore comune

Non sempre N e D sono piccoli (come 2 e 3) e allora occorre un "metodo" per trovare lo stesso nome delle parti di più frazioni, cioè per trovare il denominatore comune.

Per non complicare troppo i calcoli conviene che esso sia il più piccolo possibile, cioè occorre un minimo comune denominatore.

Esempio: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$ → e, "semplificando", $\frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Si noti che non abbiamo moltiplicato 2×6 . Non dunque i denominatori direttamente fra loro bensì il fattore comune 2 (comune a 2 e a 6) per il fattore non comune 3 (infatti è contenuto in 6 ma non nel 2).

In generale allora ci aspettiamo di dovere moltiplicare fra loro i cosiddetti fattori comuni di denominatori per i fattori non comuni presenti nei denominatori. Troveremo così un multiplo comune di diversi denominatori. Questo multiplo comune sarà anche piccolo (perché consideriamo un fattore comune solovvolta), anzi sarà il minimo possibile.

Si chiama infatti minimo comune multiplo (m.c.m.)

Esempio:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

Paragoniamo il denominatore comune 12 (prodotto diretto dei due denominatori 2 e 6) con il minimo denominatore comune che si può fare partendo da 2 e 6, cioè 6.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} = \frac{8}{12}$$

Denominatore comune (12)

* e, semplificando, $\frac{8}{12} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

$$\frac{8}{12} = \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{4}{4} \times \frac{2}{3} = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

Denominatore comune minimo (6)
dato dal minimo comune multiplo di 2 e 6.

* e, semplificando, $\frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Si vede bene che è più semplice il secondo procedimento che usa numeri più piccoli, grazie al m.c.m.

Il vantaggio è irrilevante quando le frazioni da sommare o sottrarre sono poche e con denominatori "piccoli" ma è decisivo nei casi opposti.

Conviene quindi trovare un procedimento generale per ricavare il m.c.m.

* Al posto del segno \times si usa anche il punto (\cdot). Per. $2 \times 3 = 2 \cdot 3 = 6$

PROCEDIMENTO GENERALE PER RICAVARE IL m.c.m. - Tabella ingressi/uscita

Sappiamo ora che il m.c.m. è anche il migliore (minimo) denominatore comune di più frazioni da sommare.
 Si ricava "scomponendo" (trovando) in fattori tutti i denominatori.
 Successivamente si compila una tabella dei fattori comuni (una volta per ciascuna comparsa) e dei fattori non comuni.

Esempio. Scomponiamo i numeri 2, 3, 12, 15, 16.

2	2	3	3	12	2	15	5	16	2
1		1		6	2	3	3	8	2
				3	3	1		4	2
				1				2	2
								1	

La scomposizione ci dice che i 5 numeri dati sono "scomposti" così:

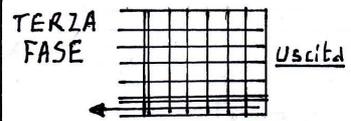
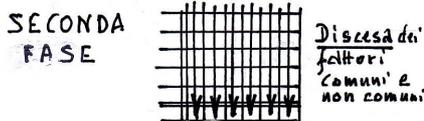
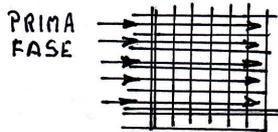
- 2 = 2 | L'unico fattore è 2; il numero dato è primo.
- 3 = 3 | Ogni scomposizione s'arresta al primo risultato 1.
- 12 = 2 · 2 · 3 | Il fattore 2 è citato due volte, a causa delle sue due comparse.
- 15 = 5 · 3
- 16 = 2 · 2 · 2 · 2 | Il fattore 2 è citato tante volte, una per ciascuna sua comparsa.

Si noti che i fattori devono essere - e sono - tutti fattori "primi", che sono giusto quelli che non sono ulteriormente scomponibili.
 (Se non lo fossero sarebbero scomponibili in altri fattori e questi sarebbero "primi" a loro volta. In ogni caso, si giungerebbe a numeri primi.)
 Troviamo ora il m.c.m. dei 5 numeri dati.
 Prepariamo una tabella con 5 righe (orizzontali) perché i numeri sono 5.
 Notiamo che è il 16 quello con più fattori: sono 4 (non importa che sono uguali).
 Prepariamo allora 4 colonne (verticali) per la tabella, ma ne serviranno di più.
 Il motivo è che i fattori non comuni vanno considerati per ciascuna comparsa.
 È bene indicare i numeri dati p.e. a sinistra in una colonna a parte, ben distinta dalle altre, magari mediante una doppia linea.

Tabella mcm

Ingressi dei numeri dati	⇒	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>12</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>15</td><td></td><td>3</td><td>5</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>16</td><td>2</td><td></td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr style="border-top: 2px solid black;"><td></td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>2</td></tr> </table>	2	2					3		3				12	2	3	2			15		3	5			16	2		2	2	2		2	3	2	5	2	} Zona (righe) dei fattori primi trovati per i numeri dati
2	2																																						
3		3																																					
12	2	3	2																																				
15		3	5																																				
16	2		2	2	2																																		
	2	3	2	5	2																																		
240 ←	←	2 · 3 · 2 · 5 · 2 · 2	←	Riga di uscita dei fattori "primi comuni e non comuni" Sono 6 cioè 2, 3, 2, 5, 2, 2.																																			
m.c.m. risultato = 240																																							

R D A S S O M M A R I O



MASSIMO COMUNE DIVISORE - M.C.D.

A volte è necessario trovare il massimo numero che sia il divisore (comune) di più numeri.

Si prepara una tabella come quella del m.c.m. vista sopra ma la si usa diversamente.

Dalle righe scendono solo gli eventuali fattori comuni (che quindi riempiono completamente la propria colonna).

In questo articolo diamo solo un esempio.

- Supponiamo di volere il M.C.D. dei numeri 3, 6, 15, 18.

3		3
1		

6		2
3		3
1		

15		3
5		5
1		

18		2
9		3
3		3
1		

Tabella didattica e tabella pratica.

Tabella MCD

3	3			
6	3	2		
15	3		5	
18	3	2		3
3	3	-	-	-

→ Numeri dati

← 3 = M.C.D.

Tabella didattica

In pratica non occorre disegnare righe e colonne della tabella. Ed ecco come:

→ 3		3
→ 6		3 2
→ 15		3 5
→ 18		3 2 3
← 3		3 - - -

Tabella pratica.

Il M.C.D. è 3 perché l'unica colonna "piena" è quella del 3.

- Un altro caso svolto senza tabella è quello di 8 e 15.

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$$

$$15 = 3 \cdot 5 \cdot 1$$

Non esiste un fattore comune $\neq 1$. Ma 1 non serve. Infatti $8:1=8$, $15:1=15$. Nessun numero si semplifica dividendolo per 1.

Non esiste un fattore comune a entrambi. Pertanto il M.C.D. = 1

- Un altro esempio senza tabella: i numeri sono 12 e 18.

Scomponendo in fattori si trova:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad (\text{Il numero 1 si omette})$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

I fattori comuni sono due: 2 e 3. Pertanto M.C.D. = $2 \cdot 3 = 6$

Infatti 12 e 18 sono entrambi divisibili per 6.