IMPOSTAZIONI DIDATTICHE

POTENZE E MUCCHI

S: Leo Incarbone

Come la moltiplicazione è la scorciatoia dell'addizione che abbia addendi uguali

così la potenza è la scorciatoia della moltiplicazione che abbia fattori uguali.

Riassunto
L'addizione e la sua inversa: la sottrazione.
La moltiplicazione e la sua inversa: la divisione.
La potenza e le sue due operazioni inverse: la radice e il logaritmo.

Confronto fra la successione dei quadrati n^2 *e la successione degli esponenziali* 2^n.

Definizione di potenza.
Perché $a^0 = 1$ *e purché* $a \neq 0$.
Esponente positivo, nullo, negativo.

Operazioni con potenze.
Operazioni ragionate con gli esponenti, ragionate prima che memorizzate.

Gerarchia delle operazioni aritmetiche fondamentali.
Operazioni commutative.

Un gradino più in basso. Mucchi.

Fondamenti filosofici: Matematica, Linguaggio, Robotica.

-----------------o-----------------

POTENZE

S. L. Incarbone

La potenza è la terza operazione diretta dopo la prima - l'addizione - e la seconda - la moltiplicazione -

ADDIZIONE L'addizione è commutativa. Pertanto gli operandi hanno lo stesso nome: addendi. Perciò ha una sola operazione inversa: la sottrazione

$$\left.\begin{matrix}2\\3\\+\end{matrix}\right\} \to 5 \qquad \left.\begin{matrix}3\\2\\+\end{matrix}\right\} \to 5$$

$$\left.\begin{matrix}5\\2\\-\end{matrix}\right\} \to 3 \qquad \left.\begin{matrix}5\\3\\-\end{matrix}\right\} \to 2$$

UNICA INVERSA: Sottrazione

Un caso particolare si ha quando gli addendi sono tutti uguali fra loro. Nasce così la moltiplicazione.

MOLTIPLICAZIONE La moltiplicazione è commutativa. Pertanto gli operandi hanno stesso nome: fattori. Perciò ha una sola operazione inversa: la divisione

$2+2+2 = 3\times 2 = 6$

3 = Numero di conteggio

si contano gli addendi

$$\left.\begin{matrix}2\\3\\\times\end{matrix}\right\} \to 6 \qquad \left.\begin{matrix}3\\2\\\times\end{matrix}\right\} \to 6$$

$$\left.\begin{matrix}6\\2\\:\end{matrix}\right\} \to 3 \qquad \left.\begin{matrix}6\\3\\:\end{matrix}\right\} \to 2$$

UNICA INVERSA: divisione

Un caso particolare si ha quando i fattori sono tutti uguali fra loro. Nasce allora la potenza.

POTENZA La potenza non è commutativa. Pertanto gli operandi hanno nomi diversi: base ed esponente. Quindi ha due operazioni inverse: radice e logaritmo.

$2\times 2\times 2 = 2^3 = 8$

3 = numero di conteggio

si contano i fattori

$$\boxed{\text{Potenza} = \text{base}^{\text{esponente}}}$$

$\sqrt[\text{esp}]{\text{Pot}} = \text{base}$

$\log_{\text{base}} \text{Pot} = \text{esp}$

due inverse = risultati

$$\left.\begin{matrix}2\\3\\\text{Pot}\end{matrix}\right\} 2^3 = 8 \qquad \left.\begin{matrix}3\\2\\\text{Pot}\end{matrix}\right\} 3^2 = 9 \qquad \neq \qquad \boxed{2^3 \neq 3^2}$$

Esempi di radice: $\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[2]{9} = \mp 3$ $\sqrt[4]{16} = \mp 2$ $\sqrt[2]{1} = \mp 1$ $\sqrt{\dots} = \sqrt[2]{\dots} = \mp\dots$ $\sqrt{1/100} = \frac{1}{10}$

Esempi di Logaritmi: $\log_{10} 100 = 2$ $\log_{10} 1000 = 3$ $\log_{10} 10^2 = 2$ $\log_2 8 = 3$ $\log_3 27 = 3$ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$ $\log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{1000} = 3$

Nota: Esaminando la diversa influenza che la base e l'esponente hanno sul risultato della potenza, confrontiamo con n intero positivo le successioni di n^2 e di 2^n. Mentre per piccoli valori di n (fino a 4 circa) i risultati paiono confrontabili o quasi, per $n>5$ appaiono differenze sempre maggiori per le successioni esaminate.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Regole **ragionate**

[POTENZE]

(e **Prontuario**)

Perché $a^0 = 1$

Dalla definizione di potenza sappiamo che p. es.:

-1 $a^5 = aaaaa$ $\quad) : a \quad \frac{aaaa\cancel{a}}{\cancel{a}} = aaaa$

-1 $a^4 = aaaa$ $\quad) : a \quad \frac{aaa\cancel{a}}{\cancel{a}} = aaa$

-1 $a^3 = aaa$ $\quad) : a$ $\quad$ - - - - - - - - - - -

-1 $a^2 = aa$ $\quad) : a \quad \frac{a\cancel{a}}{\cancel{a}} = a$

-1 $a^1 = a$ $\quad) : a \longrightarrow \frac{a}{a} = 1$

-1 $a^0 = 1$ $\longrightarrow \boxed{a^0 = 1 \quad a \neq 0}$

-1 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $\quad) : a \quad 1 : a = \frac{1}{a}$

-1 $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ $\quad) : a \quad \frac{1}{a} : a = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}$

$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ $\quad) : a \quad \frac{1}{a^2} : a = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a^3}$

- - - - $\qquad$ - - - - - -

Sulla colonna di sinistra **togliamo 1** all'esponente ($5-1=4$).
Nella colonna di destra **dividiamo per a**.
($aaaaa : a = aaaa$).

$0^1 = 0$ Per passare a 0^0 applicando la solita procedura bisognerebbe scrivere: $0^{1-1} = 0:0$ cioè $0^0 = 0:0$ e la scrittura $0:0$ equivale a domandarsi quanti punti, ciascuno di area nulla, stanno dentro un punto. Essendo questo numero del tutto indeterminato è bene evitare il caso detto imponendo $a \neq 0$.

Allora in generale $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

Ragionamento $\qquad$ Operazioni con potenze $\qquad$ **In Memoria=regole**

$a^3 \cdot a^2 = (aaa)(aa) = aaaaa = a^5 = a^{3+2} \longrightarrow a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} \longrightarrow$ $\quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^3}{a^2} = \frac{a\cancel{a}\cancel{a}}{\cancel{a}\cancel{a}} = a^1 \longrightarrow \frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1 = a \longrightarrow \frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} \longrightarrow$ $\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^3)^2 = (aaa)(aaa) = aaaaaa = a^{3\times 2} = a^6 \longrightarrow (a^3)^2 = a^6 \longrightarrow$ * $\quad (a^m)^n = a^{mn}$

$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n} \longrightarrow$ $\quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$

$a = a^1 = a^{3/3} = a^{3\times\frac{1}{3}} = (a^3)^{\frac{1}{3}} = (aaa)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{aaa} = a \longrightarrow$ $\quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

$a^{\frac{m}{n}} = a^{m\cdot\frac{1}{n}} = \begin{cases} (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \\ (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m \end{cases} \longrightarrow$ $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

$a^2 + a^3$ non elaborabili

$a^k + a^k = 2a^k$ sommabili perché basi e esponenti uguali

Nota: $\frac{a^3}{a^3} = \begin{cases} a^{3-3} = a^0 \\ 1 \end{cases} = 1$ conferma che $a^0 = 1$

* $(a^3)^2 = (a^2)^3 = a^6$

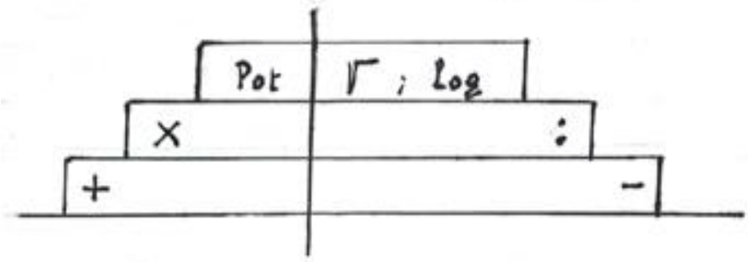
log $\longrightarrow \log_2 8 = 3$

$2^3 = 8$

$\longrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$

GERARCHIA DELLE OPERAZIONI ARITMETICHE FONDAMENTALI

Volendo rappresentare nel modo più chiaro le relazioni fra le operazioni aritmetiche fondamentali (addizione, moltiplicazione, potenza e le inverse, sottrazione, divisione, radice, logaritmo), con le loro relazioni gerarchiche e in una forma grafica che si presti allo scopo efficacemente, abbiamo scelto i gradini di una scala.
Questa sale dalle operazioni più semplici alle più complesse.



Le operazioni inverse sono su uno stesso piano ma in posizioni opposte.

Operazioni commutative.

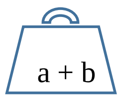
Ce ne sono solo due: ***__addizione__*** *con i suoi* ***__addendi__*** *e*
__moltiplicazione__ *con i suoi* ***__fattori__****.*

Ricordiamo che in un’espressione algebrica si dà la precedenza alle operazioni dei gradini più alti salvo che quelle dei gradini più bassi siano protette da parentesi.

P. es. 5 x 3 + 6 = 15 + 6 = 21
Ma: 5 x (3 + 6) = 5 x 9 = 45 (si dà precedenza alla parentesi).

La parentesi è come una borsa di cui preservare integri i contenuti.

(a + b) =



UN GRADINO PIÙ IN BASSO. MUCCHI.

Si può domandare se possa esistere nella scala un'operazione più in basso dell'addizione.
Nell'addizione mettiamo insieme oggetti per formare quantità.
Immaginiamo di mettere insieme oggetti diversi per formare semplicemente un ***mucchio****.*

Operazioni di questo tipo – "ammucchiare" e la sua contraria, "selezionare" - possono esistere nella teoria degli insiemi e si presentano come operazioni di rango più basso dell'addizione e della sottrazione, eppure molto potenti per la possibilità di operare su qualsiasi genere di cosa.

Ci si può riferire anche all'algebra di Boole usata nei computer e basata sulle operazioni fondamentali E, O e Non, inventata dal suo autore nel tentativo d'individuare le "leggi del pensiero".

Lavorare e manipolare mucchi tramite nomi e simboli modali anziché tramite numeri, diventa allora non solo possibile ma auspicabile e naturale nella prospettiva di una robotica adattata al lavoro intelligente.

FONDAMENTI FILOSOFICI: Matematica, Linguaggio, Robotica.

L' addizione non è che un caso particolare di *mucchio* che si verifica quando gli *oggetti sono tutti uguali fra loro*; analogamente la moltiplicazione è un caso particolare di addizione che si verifica quando le quantità da sommare sono tutte uguali fra loro; così pure la potenza è un caso particolare di moltiplicazione quando sono uguali fra loro più fattori.

La matematica classica, in realtà un caso particolare del linguaggio comune, riguardava praticamente sempre mucchi di oggetti fra loro uguali (le mele si possono sommare ad altre mele ma non con le arance a meno che non si voglia parlare del mucchio "frutti" o di un mucchio ancora più ampio, p. es. "oggetti").

Oggi possiamo riconoscere che non c'è più alcuna separazione filosofica netta fra "linguaggio" comune e "matematica".
La matematica fa parte del linguaggio.
La sua maggiore potenza apparente sta nel trattare oggetti uguali o almeno simili.

Dal canto suo il linguaggio comune ha il vantaggio di poter trattare anche mucchi di oggetti diversi e quindi di apparire più generale e flessibile: in realtà, con l'avvento dei computer e della robotica ci sembra caduta la barriera fra linguaggio comune e matematica.