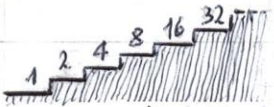
IMPOSTAZIONI DIDATTICHE

Logaritmi

S. Leo Incarbone

Esiste un tipo di numerazione di potenza inaudita.
Archimede se n'era accorto e ne parlava nel suo libro intitolato "Arenario" con riferimento alla numerabilità dei granelli di sabbia del mare, ma anche al numero delle stelle nel firmamento.
Analogamente sappiamo che un faraone grato per un lavoro svolto da un matematico gli offrì qualunque cosa gli avesse chiesto. Rispose il matematico che si sarebbe sarebbe accontentato di un chicco di grano sul gradino iniziale di una scala, di due sul secondo gradino e così via raddoppiando il numero, ogni gradino.
Il faraone sorrise alla richiesta così modesta, ma ben presto capì che non bastavano tutti i granai del regno. I chicchi necessari erano già più di 1000 al decimo gradino e più di un milione al ventesimo, nonché un miliardo al trentesimo...



1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024 2048 4096 .... C ......

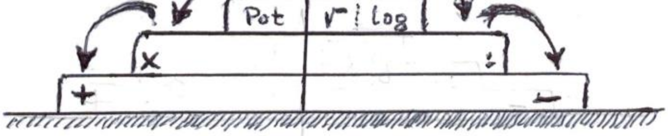
2^0 2^1 2^2 2^3 2^4 .... 2^9 2^{10} 2^{11} 2^{12} .... 2^n ......

Il fatto è che i chicchi aumentavano smisuratamente di numero all'aumentare dello esponente (detto anche logaritmo) assegnato alla base 2 nuovamente a ogni gradino.
In fisica e in altri campi i logaritmi sono utili per esprimere un ordine di grandezza.
P.es. 1000 è espresso con la lettera K (come in kg km Kbit) o "Kilo" $\rightarrow 10^3 \rightarrow 1000$
1.000.000 " " " " " M (come Mbit) o "Mega" $\rightarrow 10^6 \rightarrow 1000 \times 1000$
1.000.000.000 " " " " " G (come GHz) o "Giga" $\rightarrow 10^9 \rightarrow 1000 \times 1000 \times 1000$
Ogni ordine di grandezza differisce dal precedente per un fattore 1000.

o

Utilità dei logaritmi

I logaritmi sono utili non solo per la numerabilità di grandi quantità o di quelle infinitesime, usando esponenti negativi per gli ordini di grandezza (come "milli" $\rightarrow 10^{-3}$, "micro" $\rightarrow 10^{-6}$, "nano" $\rightarrow 10^{-9}$, "pico" $\rightarrow 10^{-12}$ ...) ma anche per degradare operazioni di difficile e laboriosa esecuzione p.es. trasformando moltiplicazioni in addizioni, potenze in moltiplicazioni, divisioni in sottrazioni...
Le addizioni e le sottrazioni non possono essere degradate perché nella scala delle operazioni non esistono gradini di rango più basso.



Due numerazioni: usuale e logaritmica.

Qualche lettore potrebbe rimanere perplesso, se non incredulo, nell'apprendere che i logaritmi possono trasformare le moltiplicazioni in semplici addizioni, né se ne vede l'utilità pratica giacché le operazioni più laboriose sono usate solo occasionalmente.
Inoltre al giorno d'oggi esistono calcolatori tascabili e il problema non si pone, o quasi.
Tuttavia non dobbiamo dimenticare che fino a pochi decenni fa il progresso della scienza molto si basava sull'osservazione degli astri a cui oggi s'aggiunge la conquista dello spazio e lo sviluppo di nuove tecnologie.
Gli astronomi dovevano eseguire, a mano, masse incredibili di calcoli di rango elevato spesso tramandate da una generazione all'altra.
La situazione migliorò drasticamente con l'uso sistematico dei logaritmi.
Delle basi di questo possibile uso, daremo dapprima un'esposizione intuitiva più facilmente comprensibile, poi una giustificazione logica che pur potendo sembrare astratta, corrobora la validità del metodo.

Esposizione intuitiva.

Paragoniamo ora la numerazione usuale con quella logaritmica.
Cominciamo dunque con l'osservare che la numerazione "normale", o usuale, procede per numeri interi sommando ogni volta un'unità, cioè il numero 1.
Iniziando da zero, si ha successivamente: 0, 0+1=1, 1+1=2, 2+1=3, ...
Si ottiene così una "progressione aritmetica" di "ragione" 1.
Dato un qualsiasi elemento della successione basta sommare la "ragione" 1 per ottenere il successivo.

$$0 \overset{+1}{\frown} 1 \overset{+1}{\frown} 2 \overset{+1}{\frown} 3 \frown 4 \quad 5 \quad 6 \ldots.. \qquad \text{Numerazione usuale.}$$

Sottraendo 1 si procede a ritroso, si può scavalcare lo 0 e si trovano i numeri negativi.
Cosa accadrebbe se per contare le cose le numerassimo moltiplicando anziché sommando?
Certo non potremmo moltiplicare sempre per 1 perché non si avanzerebbe nel conteggio: infatti qualsiasi numero moltiplicato per 1 non progredisce; rimane lo stesso. Dovremo moltiplicare per un altro numero diverso, p.e. per 2. Non potremo però cominciare dallo zero perché $2 \cdot 0 = 0$ e non progrediremmo nel conteggio: il risultato sarebbe sempre zero. Dovremo allora partire da un altro numero: p.e. da 1.
Questa volta avremo 1 poi $1 \cdot 2 = 2$ $2 \cdot 2 = 4$ $4 \cdot 2 = 8$ $8 \cdot 2 = 16 \ldots$
Mettendo in fila i numeri risultati, avremo la cosidetta "progressione geometrica" di "ragione 2" che noi diremo "moltiplicativa": 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... Si noti: il 1° numero ottenuto è 2 da $1 \times 2 = 2$.
Si può notare che il rapporto fra due elementi consecutivi della progressione è 2.
Dividendo per 2 si procede a ritroso; si può scavalcare l'1 e si trovano alcuni numeri reciproci $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

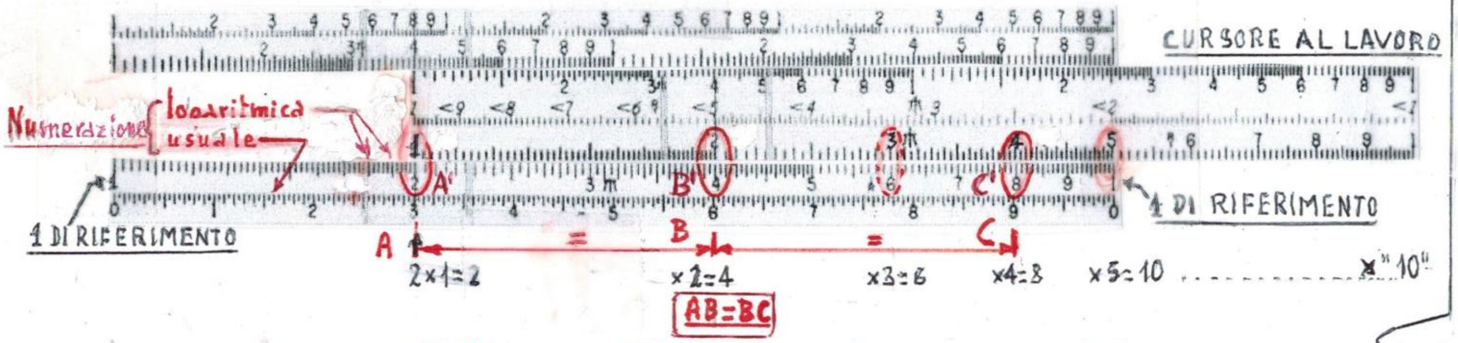
	0
0	1
1	2
+	3 ×
2	4
	5
=	6 =
	7
3	8

Poniamo a confronto le due progressioni affiancandole.
Nella nuova numerazione quando diciamo 1 2 3 ... in realtà indichiamo 2, 4, 8 ...
Ci accorgiamo che nella nuova scala stiamo usando esponenti di 2: $2^0=1, 2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, \ldots$
La nuova scala di numerazione è dunque una scala logaritmica.
Vediamo altresì che la nuova scala trasforma i prodotti in somme!
Infatti fare 1+2=3 a sinistra significa fare moltiplicazioni a destra: 2×4=8 !!!
Utilizzando i logaritmi tutte le operazioni degradabili vengono degradate!

$$1+2=3 \longleftrightarrow 2\times4=8 \;; \quad 3-1=2 \longleftrightarrow 8:2=4$$

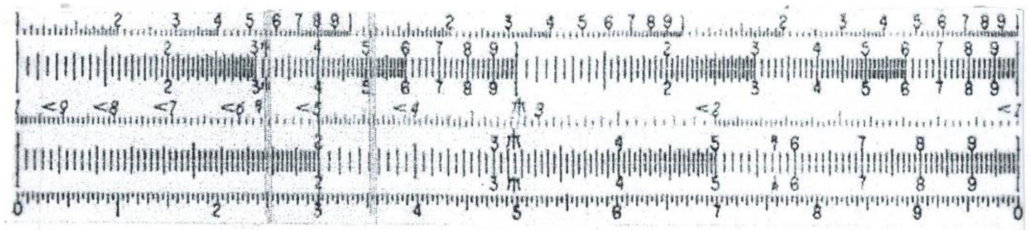
$$\begin{matrix} 1 & + & 2 & = & 3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 2 & \times & 4 & = & 8 \end{matrix}$$

REGOLO MOLTIPLICATIVO



AB=BC ma su uguali lunghezze non poniamo somme ma prodotti

REGOLO MOLTIPLICATIVO - CURSORE A RIPOSO.



SCALA "LOGARITMICA"

AB=BC per costruzione.
Nella scala usuale la taratura è
A=3 B=6 C=9 quindi:
C-B=9-6=3 } si mantiene
B-A=6-3=3 } la differenza

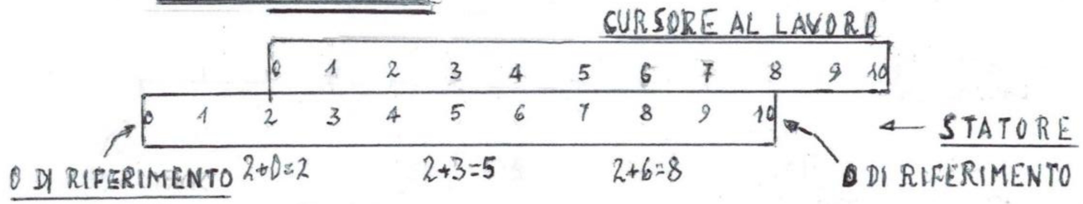
Nella scala logaritmica si tara:
A'=1 B'=4 C'=8 quindi:

$\frac{C'}{B'}=\frac{8}{4}=2$ } si mantiene
$\frac{B'}{A'}=\frac{4}{2}=2$ } il rapporto

Tuttavia $C'-B'=8-4=4$
$B'-A'=4-2=2$
quindi a parità d'intervallo i numeri che vi sono contenuti s'infittiscono e non è semplice determinarne la posizione. Nacque così l'interesse per lo studio della funzione $\log x = y$

$y = \log_b x$ b=base

REGOLO SOMMATORE



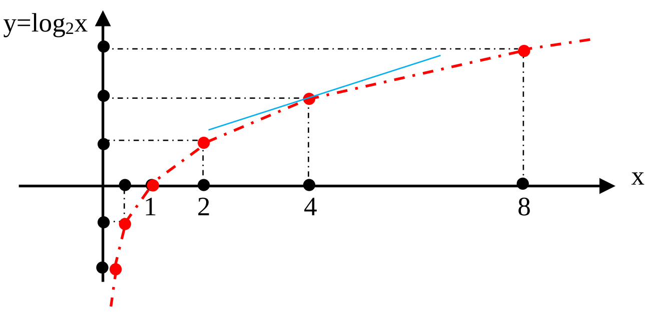
SCALA "LINEARE"

In questo regolo sommatore la scala è lineare e i numeri sono equidistanti.
La scala inizia da zero. (Nel moltiplicatore inizia da 1).
Per eseguire 2+9=11 si sposta il cursore, col 10, sul 2 dello statore. Il 9 andrà su 1 che si leggerà "11".

Nel regolo sommatore su uguali lunghezze poniamo progressioni "normalmente" additive, non moltiplicative

Continuiamo con la nostra esposizione intuitiva. La possibilità di trasformare i prodotti in semplici somme e viceversa [4L] ritrasformare il risultato della somma nel risultato del prodotto desiderato, significava poter semplificare i calcoli non solo in astronomia ma anche nelle scienze, nelle applicazioni tecnologiche e in qualsiasi campo ciò fosse richiesto. Tutto ciò stimolò lo studio dei logaritmi nei secoli scorsi. Una delle applicazioni pratiche più diffuse nel 1900, fu l'uso del regolo calcolatore che si basava appunto sull'uso di una scala logaritmica impressa sullo statore e sul cursore, scorrevoli l'uno rispetto all'altro. Su un "regolo" siffatto si poteva apprezzare la seconda cifra decimale e ciò era sufficiente nei calcoli di prima mano. Avevano dunque ragione i nostri padri ad interessarsi dei logaritmi, il cui studio però non si presentò facile nel senso che di essi era immediato ottenere il valore soltanto per certi numeri interi della variabile indipendente x.
Esclusi i valori più ovvi (come 1= logaritmo di 10 in base 10; 2 = logaritmo di 100 in base 10; 3 = log di 8 in base 2...), era sicuramente problematico il calcolo di valori intermedi non immediati (p. es. logaritmo di 11 oppure logaritmo di 26,38 e così via). I matematici dovettero affrontare il problema di approntare delle tavole di consultazione dei logaritmi con valori sufficientemente approssimati; bisognava anche decidere la base di questi logaritmi. (P. es. la base di $\log_{10} 100 = 2$ è 10). Per avere un'idea dell'andamento della funzione logaritmica, è utile tracciarne un grafico, almeno in alcuni punti di più semplice calcolo. Consideriamo per es. alcuni valori del logaritmo *in base due* (omesso nel simbolo) in un grafico (x, y).

essendo $2^{-2} = ¼$: ... log ¼ = -2, log ½ = -1, log 1 = 0, log2 = 1, log4= 2, log 8 = 3,



Come si vede, la funzione (in rosso) cresce molto lentamente all'aumentare di x nella zona x>1, mentre sprofonda negativamente per x<1. Si tenga conto che il tracciato è ottenuto unendo punti noti con segmenti rettilinei (rossi) mentre in realtà si tratta di una curva. Si apre così il problema di determinare l'andamento della funzione anche per valori qualsiasi della x. In una grossolana approssimazione si può tentare di "raccordare" a mano i punti noti con una linea curva il più possibile continua nell'andamento. Un approccio migliore consiste nel calcolare la derivata per precisare la pendenza della curva nei punti prescelti. Infatti la derivata ha il significato geometrico di angolazione della tangente (blu) alla curva nel punto prescelto. Ciò dà un'idea più precisa sull'andamento della curva in punti intermedi di cui si conosce l'ascissa (scelta a piacere) e l'angolazione della tangente. Se il logaritmo è in base neperiana (base = 2,71828... = "e") allora la derivata è 1/x; diversamente, se il logaritmo è in base diversa, p. es. 2, avendosi – secondo relazioni che qui non dimostriamo - $\log_2 x = (\log_2 e)(\log_e x) = [1/(\log_e 2)]\,(\log_e x)$ risulta:

$$(\log_2 x)' = (1/\log_e 2)\,(1/x) = 1{,}44269(1/x).$$

Il problema di calcolo dei logaritmi, la cui esistenza è interessante a fini didattici, è da tempo risolto dalla matematica.
Si dimostra che la funzione y=logx è calcolabile mediante un polinomio di grado elevato quanto si vuole a seconda dell'approssimazione voluta. I coefficienti del polinomio sono calcolati mediante formule che fanno uso di opportuni valori delle derivate y', y", y''', ...

Esposizione logica.
Finora abbiamo mostrato intuitivamente mediante i sistemi di numerazione (usuale e logaritmica), la possibilità dei logaritmi di degradare le operazioni. Vogliamo ora dimostrarla per via logica.

Esaminiamo il logaritmo in base "a" del prodotto di due fattori m ed n e scriviamo

$$\log_a mn = z.$$

Diamo un nome al logaritmo di ciascun fattore, ossia:

$$x = \log_a m \quad e \quad y = \log_a n.$$

Dalle suddette denominazioni si trae per definizione di logaritmo (esponente da dare alla base per ottenere il numero):

$$a^z = mn; \qquad a^x=m; \quad a^y=n$$

Moltiplichiamo fra loro le due ultime relazioni, membro a membro:

$$a^x a^y = mn \quad \Rightarrow \quad \text{ma è} \quad \Rightarrow \quad a^z = mn = a^x a^y = a^{x+y}$$

dunque se $a^{z} = a^{x+y}$ allora significa che:

$$z = x+y$$

ma per le posizioni poste, sostituendo abbiamo:

$$\boxed{\log_a mn = \log_a m + \log_a n}$$

e memorizzando: "***Il logaritmo del un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori***"

Abbiamo così dimostrato – almeno per il prodotto - la capacità che i *logaritmi hanno di degradare le operazioni*: infatti per eseguire un prodotto mn, si calcolino dapprima i logaritmi dei singoli fattori, $\log_a m$ e $\log_a n$, si sommino questi logaritmi e si consideri il risultato $\log_a m + \log_a n$ come logaritmo del prodotto di quei fattori, $\log_a mn$. Dopo di ciò basta trovare il numero ("antilogaritmo") che corrisponde a questo ultimo logaritmo e questo numero è il prodotto cercato.
Questa dimostrazione è un ottimo esempio di procedimento logico che sfrutta le definizioni per trarne tutte le conseguenze al fine di pervenire a nuovi assunti.

Con analogo procedimento, ponendo questa volta $\log_a(m/n) = z$ si dimostra che:

$$\boxed{\log_a (m/n) = \log_a m - \log_a n}$$

memorizzato: "***Il logaritmo del rapporto è uguale al logaritmo del numeratore meno il logaritmo del denominatore***"

La dimostrazione – essendo analoga alla precedente - è lasciata al lettore. Anche qui è in gioco la capacità che i logaritmi hanno di degradare le operazioni: infatti per eseguire una divisione, si calcolino dapprima singolarmente i logaritmi del numeratore $\log_a m$ e del denominatore $\log_a n$, si sottrae poi il secondo dal primo e si considera il risultato $\log_a m - \log_a n$ come logaritmo del quoziente $\log_a (m/n)$. Dopo di ciò basta trovare il numero ("antilogaritmo") che corrisponde a questo ultimo logaritmo e proprio questo numero è il quoziente cercato.

Dimostriamo ora che $\log_a (m^n) = n\log_a m$

Poniamo: $\log_a (m^n) = z$ $\quad \log_a m = x$

Per definizione di logaritmo si ha allora:

$$a^z = m^n; \qquad a^x = m$$

elevando alla n la seconda relazione si ha:

$$(a^{x)\, n} = m^n \quad \Rightarrow \quad \text{ossia } a^{xn} = m^n = a^z \quad \Rightarrow \quad a^{xn} = a^z$$

Essendo a=a, deve essere anche z= xn ovvero z = nx

Ma per le posizioni poste, è allora:

$$\boxed{\log_a (m^n) = n \log_a m}$$

memorizzabile come: "***Il logaritmo della potenza è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base***"

Anche qui vediamo che l'operazione è degradata: la potenza è infatti degradata in un prodotto (e questo si può volgere poi in somma). Se al posto di n si considera 1/n si vede che si ha una radice ($m^{1/n} = \sqrt[n]{m}$) e questa radice è degradata in divisione (e poi in differenza): precisamente risulta:

$$\boxed{\log_a (m^{1/n}) = (1/n) \log_a m}$$

in memoria: "***Il logaritmo della radice è uguale al logaritmo del radicando, tutto diviso per l'indice di radice***".

Il problema del calcolo dei logaritmi (è parso istruttivo parlarne) è da tempo risolto dalla matematica.
Si dimostra che la funzione y = log x è calcolabile mediante un polinomio di grado elevato quanto si vuole a seconda [6L] dell'approssimazione voluta. I coefficienti del polinomio sono calcolati mediante formule che fanno uso di opportuni valori delle derivate y', y", y''', ...
Per dare un'idea della possibilità suddetta, possiamo notare che in un riferimento cartesiano a due dimensioni:

1. un polinomio di I° grado y = mx + n, rappresenta l'andamento di una retta.
2. un polinomio di II° grado $y = ax^2 + bx + c$, rappresenta una curva parabolica: incontra una retta non più di 2 volte.
3. un polinomio di III° grado $y = ax3 + bx^2 + cx + d$, "è" una curva con flesso; incontra una retta non più di 3 volte.
4. un polinomio di n° grado y = ... corrisponde a una curva che incontra una retta non più di n volte.

Da tutto ciò deriva che per descrivere con buona approssimazione una curva con un andamento abbastanza complesso è in generale necessario ricorrere ad un polinomio di grado sufficientemente elevato.
Per quanto riguarda l'aiuto offerto dalle derivate alla comprensione della curva cominciamo a supporre che dato un valore di $x=x_0$ di una funzione, questa sia monodroma, ossia corrispondentemente ad x_0 assuma uno ed un solo valore y_0 che precisa la posizione di ***un punto*** A ➔[x_0; f(x_0)] della funzione nel piano cartesiano. Per indicare che ciò accade per qualsiasi punto, scriveremo: A ➔ [x; f(x)].
Al contrario la derivata "prima", definita da:

$$y' = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

fornisce informazioni su ***due punti*** della funzione – sia pure separati da una distanza Δx "infinitesima" - e cioè sui due punti A e B:

A➔[x_0; f(x_0)] B➔[x+ Δx; f(x+Δx)]

Per comodità d'esposizione, diciamo Δx una quantità "abbastanza piccola" in relazione agli scopi, come nel calcolo numerico (p. es. usato in un computer).
Possiamo così dire che la derivata "seconda", definita come la derivata della derivata, fornisce informazioni su ***tre punti*** della funzione. Infatti:

$$y'' = \frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x} = [\frac{f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}]/\Delta x =$$

$$= \frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{(\Delta x)^2}$$

I tre punti sono ***A➔[x; f(x)] B➔[x+ Δx; f(x+Δx)] C➔(x+ 2Δx; f(x+2Δx)***

Se il numeratore dell'ultima frazione di y'' fosse zero, la derivata seconda sarebbe nulla; si avrebbe:

f(x+2Δx) - 2f(x+Δx) + f(x) = 0 f(x+2Δx) + f(x) = 2f(x+Δx)

e quindi la funzione sarebbe una retta

$$\boxed{f(x+\Delta x) = \frac{f(x+2\Delta x)+f(x)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad f(x_B) = \frac{f(xA)+f(xC)}{2}}$$

Ossia, nella derivata seconda ***il valore della funzione*** *nel punto B di ascissa x + Δx, (punto centrale dell'intervallo di ampiezza 2Δx), viene paragonato* ***alla media dei valori della funzione nei punti estremi*** *A e C del medesimo intervallo. Ciò permette d' apprezzare un'eventuale curvatura della funzione in esame. Relazioni analoghe e più complesse, relative alle derivate di ordine superiore al secondo, sono note ed usate nel calcolo numerico (p. es. col computer). Sono altresì utili a chi ha bisogno di rendersi conto dell'utilità del calcolo delle derivate per comprendere sia* ***l'andamento di una funzione*** *rappresentato da una curva corrispondente, sia l'utilità e la possibilità di* **costruzione d'un polinomio di grado sufficientemente alto**. *Il legame fra derivate in "un punto" e polinomio approssimante di una funzione è dimostrata p. es. dalla teoria delle* ***serie di Taylor***, *qui non presentata.*