Geometria analitica

di

Salvatore Leo Incarbone

Introduzione e cenni storici.

Questo breve scritto ha scopo introduttivo e d'impostazione in senso didattico senza con ciò escludere l'aiuto di un capace maestro. Si suppone un livello di conoscenze delle regole dell'aritmetica e dell'algebra; non richieste di analisi infinitesimale.
La geometria analitica fu inventata dal filosofo e matematico Cartesio e pertanto è nota anche come geometria cartesiana. La sua invenzione ha una grande importanza poiché rende visibili geometricamente e figurativamente concetti e procedimenti algebrici.
*L'elemento fondamentale dell'***algebra** *è il* **numero***, ente astratto, e i procedimenti algebrici sono o erano essenzialmente relazioni fra numeri, condotte secondo i principi della logica anche se a volte non immediatamente comprensibili nelle conseguenze.*
L'elemento fondamentale della **geometria** *è invece il* **punto***. Anche questo è un ente astratto ma è comunque legato in qualche modo all'intuizione e alla percezione immediata: i procedimenti geometrici sono relazioni che rispettano le esigenze dello spazio usuale, per esempio la conservazione delle lunghezze, delle aree, dei volumi o l'elaborazione figurativa delle forme spaziali che sono di solito facilmente percepibili, visibili e quindi più facilmente e velocemente comprensibili*
.
A ben vedere, l'invenzione di Cartesio (1596-1650) consiste nel porre in relazione gli elementi fondamentali dell'algebra, i numeri - con gli elementi fondamentali della geometria, cioè i punti. In un certo senso, così, l'algebra diventa "visibile" nello spazio sensibile. Pressoché contemporaneo, Galileo (1564-1642) vedeva il **libro della natura** *scritto in caratteri geometrici, matematici!*
La relazione escogitata da Cartesio è rigorosa e utile. Un numero viene posto in relazione con un punto ben preciso.
Infatti, il numero è concepito come una **quantità** *variabile che può essere precisata di volta in volta a seconda di ciò cui si riferisce mentre il punto è pensato come una* **posizione** *che può essere occupata su una retta. Cartesio stabilisce così una corrispondenza arbitraria ma precisa tra il numero x – che può aumentare o diminuire a volontà – e un punto P che si muove progressivamente avanti o indietro su una retta.*

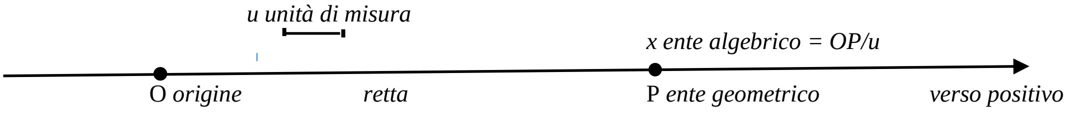
*Il Rinascimento europeo galoppava. Infatti – nello stesso periodo - le "***qualità primarie"** *di Galileo erano quelle* **misurabili***, fondamentali per la fisica d'allora, perché traducibili in* **numeri e in posizioni nello spazio degli strumenti di osservazione – come tacche di una scala***!*
Oggi anche le **qualità secondarie –** *a quel tempo* **ritenute ingannevoli e non misurabili** *- possono essere misurate con gli opportuni trasduttori (p. es. naso elettronico, microfono, fotoelementi...).*
È possibile che per Cartesio l'idea di corrispondenza – fra algebra e geometria - sia un riflesso ispirato dalla sua concezione filosofica del problema della conoscenza, posto dal dualismo irrisolto fra spirito ("res cogitans'") e materia ("res extensa"). Egli "risolve" il dualismo fra spirito e materia ricorrendo alla "mente di Dio" che governa e garantisce la corrispondenza fra la cosa materiale e la conoscenza della cosa stessa. Analogamente, infatti, algebra e geometria rimangono nettamente separate eppure si corrispondono perfettamente nella mente del matematico; ciò sembrando come un riflesso della sua filosofia dualistica.

Storicamente l'uso di coordinate per determinare una posizione nello spazio era già noto nell'antichità, prima di Cartesio.
*Egli però non si limita a determinare una posizione mediante coordinate ma permette a un "***luogo geometrico***" di corrispondere a relazioni algebriche, permettendo così un enorme progresso alla matematica (il luogo geometrico è un insieme di punti che godono tutti di una stessa* **unica legge** *come p. es. i punti di una circonferenza che sono tutti equidistanti da un centro).*
Nello stesso periodo pure Galileo concepisce la legge fisica come un'unica relazione matematica che descrive tutti gli infiniti stati diversi di un medesimo fenomeno naturale (p. es. f=ma; ossia forza = massa del corpo per accelerazione).

Sistema di riferimento monodimensionale

Nasce così il ***sistema di riferimento monodimensionale*** costituito da quattro elementi scelti in modo arbitrario.

Una retta arbitrariamente scelta.
Un punto fisso sulla retta, arbitrariamente scelto, detto origine O.
Un'unità di misura u arbitrariamente scelta.
Un verso, detto positivo, arbitrariamente scelto.



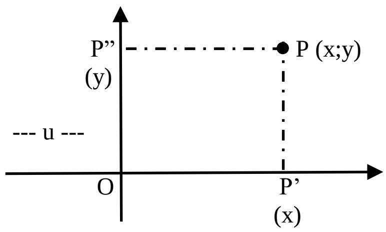
In conseguenza di queste scelte arbitrarie, a un punto *P* sulla retta può corrispondere un numero *x* che è determinato contando quante volte l'unità di misura "*u"* sta nel segmento *OP* a partire dall'origine *O*, cioè eseguendo il rapporto *(OP)/u* e assegnando il

segno positivo *(+)* se il punto *P* si trova sulla semiretta con origine in O concordemente al verso scelto; è assegnato il segno negativo *(-)* in caso contrario.
Abbiamo così stabilito una "***corrispondenza biunivoca***" ***P ⇔ x*** fra ***punto P e numero x*** e ***viceversa*** tra *numero x e punto P*. Ciò significa che dato un punto P qualsiasi sulla retta, ad esso corrisponde un ***unico*** numero x e, viceversa, dato un numero qualsiasi x, a questo corrisponde un ***unico*** punto P sulla retta. Pertanto la corrispondenza è non solo univoca (cioè senza ambiguità) ma anche biunivoca (cioè valida in entrambi i sensi) poiché vale sia dal punto al numero e sia viceversa dal numero al punto. La retta è orientata (cioè completa di verso), numerabile punto per punto grazie ad u, partendo da O, con il verso scelto. La retta così preparata si dice "asse delle x" o "asse x" o "asse delle ascisse". Il numero x è detto "ascissa".

Sistema di riferimento bidimensionale. Coordinate di un punto.

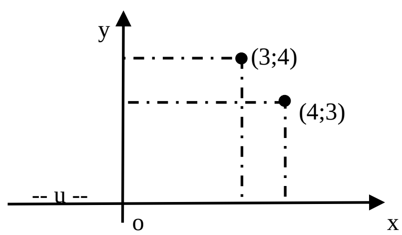
La corrispondenza biunivoca, che abbiamo visto possibile instaurare su una retta, può essere estesa pure al caso dei punti di un piano, adottando però alcune modifiche. Anche in questo caso abbiamo quattro elementi diversi, arbitrariamente scelti.
Nascerà così un ***sistema di riferimento bidimensionale***; si pongono:

Due rette *con planari, non parallele, arbitrariamente scelte (di solito perpendicolari fra loro).*
Un ***punto fisso*** *detto origine O, arbitrariamente scelto (di solito esistono due origini - sulle due rette - ma qui sono scelte coincidenti nel punto d'intersezione delle rette, per semplicità).*
Due unità di misura *arbitrariamente scelte (in matematica, di solito se ne sceglie una sola u per entrambe le rette).*
Due versi positivi*, arbitrariamente scelti, uno per ciascuna retta.*



In conseguenza di queste scelte, dal punto *P* nel piano tracciamo due parallele fino a incontrare le due rette scelte, dette "***assi***". Le parallele incontrano gli assi in P' e P". A questi due punti corrispondono rispettivamente i numeri *x e y* che sono determinati contando quante volte l'unità di misura *u* sta nel segmento *OP'* e, rispettivamente, nel segmento OP" a partire dall'origine *O*, cioè eseguendo i rapporti *(OP')/u* e *(OP")/u*. Ogni volta si assegna il segno positivo *(+)* se ci si trova sulla semiretta concordemente al verso scelto, il segno negativo *(-)* in caso contrario. Abbiamo così stabilito una "***corrispondenza biunivoca***" ***P ⇔ (x, y)*** fra *P punto* e la *coppia ordinata di numeri reali x e y*. I numeri x e y si dicono "***coordinate***".

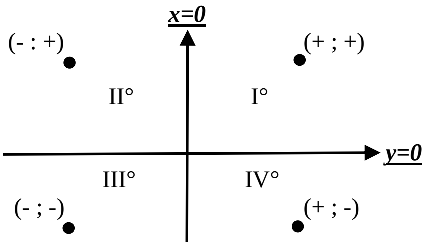
Notiamo che dato un punto P qualsiasi sul piano, ad esso corrisponde un'***unica*** coppia ordinata di numeri (*x; y*).
Viceversa, data una coppia ordinata di numeri reali (*x, y*) a questa corrisponderà un unico punto P del piano.
Pertanto la corrispondenza è anche in questo caso ***biunivoca*** poiché vale sia dal punto alla coppia di numeri e sia viceversa dalla coppia di numeri al punto. Vediamo infatti che la coppia di coordinate (3;4) non è la stessa cosa della coppia (4;3) poiché nonostante i numeri siano gli stessi, essi sono diversamente ordinati. Alle due coppie corrispondono quindi due punti diversi nel piano.
Una qualsiasi ***coppia di numeri reali*** individua sempre un ***punto unico*** nel piano cartesiano.
Viceversa, ad un punto nel piano corrisponde un'***unica coppia ordinata di numeri reali***. Il primo numero è detto "***ascissa***" e il secondo "***ordinata***". Entrambe sono dette "***coordinate***".



I quattro quadranti del piano di riferimento cartesiano. Equazioni degli assi cartesiani.

I due assi *x* e *y* del piano cartesiano danno luogo a quattro quadranti:

- nel primo quadrante (I°), in alto a destra, le due coordinate sono sempre entrambe positive (++),
- nel secondo quadrante (II°), in alto a sinistra, l'ascissa è negativa ma l'ordinata è positiva (-, +),
- nel terzo quadrante (III°), in basso a sinistra, le due coordinate sono entrambe negative (-, -),
- nel quarto quadrante (IV°), in basso a destra, l'ascissa è positiva ma l'ordinata è negativa (+, -).

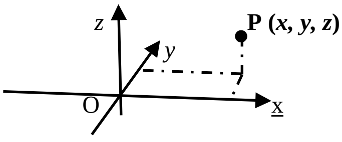


I quattro quadranti ed i segni delle loro coordinate.

Da notare che l'asse x è caratterizzato dal fatto che tutti i suoi punti hanno ordinata y nulla perciò possiamo convenire che l'equazione y=0 è l'equazione che corrisponde a questo asse. Analogamente, l'asse delle x "rappresenta" o "visualizza"," rende visibile" l'equazione y=0 la quale è detta equazione di primo grado perché la variabile y ha esponente sottinteso uno (y^1).
Pertanto possiamo concludere che, ***y=0 è l'equazione dell'asse x****.*
Naturalmente anche l'asse delle y ha analoga caratteristica, solo che è riferita invece all'equazione x=0.
Possiamo così concludere che, ***x=0 è l'equazione dell'asse y****.*

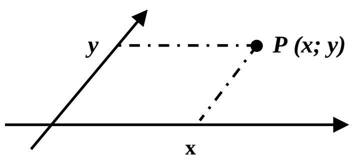
Sistema di riferimento tridimensionale

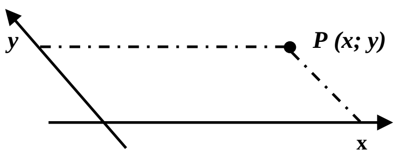
La corrispondenza biunivoca fra punti e numeri può essere instaurata anche per i punti dello spazio. In questo caso ciascun punto corrisponderà a una terna ordinata di numeri reali del tipo (x, y, z). La variabile z è detta "*quota*". Naturalmente le coordinate sono *tre*: *ascissa x, ordinata y, quota z*.



Assi obliqui.

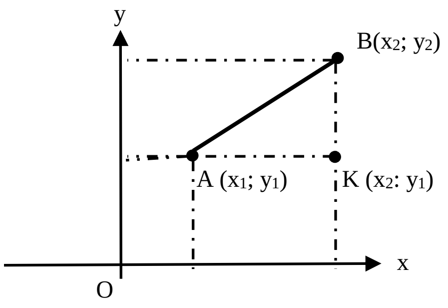
Nello studio dei cristalli e dei minerali così come in altri casi, può essere conveniente usare assi obliqui, cioè non perpendicolari fra loro. I valori delle coordinate si ricavano geometricamente tracciando opportunamente le parallele agli assi (e non le perpendicolari). Solo quando gli assi sono perpendicolari fra loro è indifferente tracciare le parallele o le perpendicolari agli assi stessi per ricavare le coordinate.





Distanza nel piano cartesiano.

Dati due punti A (x_1: y_1) e B (x_2; y_2) nel piano cartesiano, la loro distanza può essere calcolata conoscendo le loro coordinate.
Avendo le coordinate dei punti, la loro distanza è calcolabile.
La loro distanza può essere calcolata con il teorema di Pitagora.



Applicando il suddetto teorema al triangolo rettangolo ABK, si ha:

$\overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{BK}^2$
Ma: AK = $x_2 - x_1$
BK = $y_2 - y_1$ quindi:

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ da cui:
$AB = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$

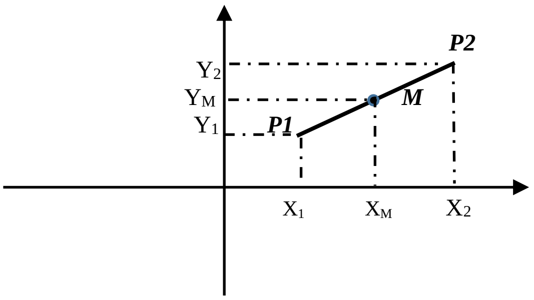
Osserviamo che le distanze su una stessa retta orizzontale o verticale, sono semplici differenze (da calcolare su una sola delle due coordinate, X oppure Y).

Coordinate del punto medio di un segmento nel piano cartesiano.

Dati i due punti estremi P_1 e P_2 di un segmento, il punto medio M del segmento è caratterizzato dall'uguaglianza delle distanze di M dai due estremi. Per semplificare posizioniamo i due estremi su un asse di riferimento monodimensionale.
Il punto medio M divide in parti uguali il segmento e cioè deve risultare:

$X_M - X_1 = X_2 - X_M$ *risolvendo rispetto a X_M si ottiene:*
$2 X_M = X_1 + X_2$ *e quindi:*

$X_M = (X_1 + X_2) / 2$ *media dei due valori di ascisse degli estremi A e B. Analogamente per Y si ha:*
$Y_M = (Y_1 + Y_2) / 2$ *media dei due valori di ordinate degli estremi A e B.*



Conclusione. *Le coordinate del punto medio di un segmento AB si ottengono eseguendo la media su ciascuna delle coordinate degli estremi del segmento, ossia*:

$$\boxed{X_M = \frac{X_1 + X_2}{2}} \qquad \boxed{Y_M = \frac{Y_1 + Y_2}{2}}$$

Un principio logico fondamentale in algebra. Manipolazione di un’eguaglianza.

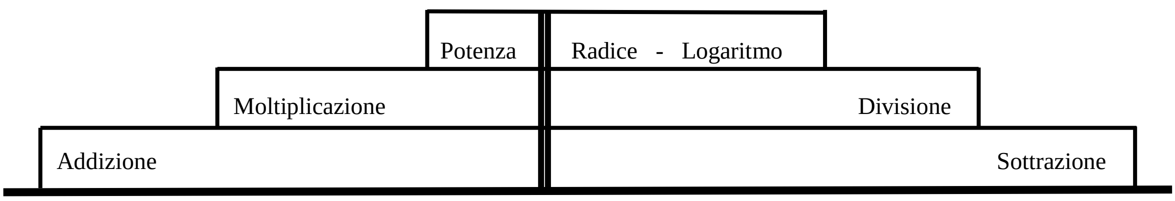
Dal momento che la geometria analitica pone una corrispondenza fra algebra e geometria, si comprende che è necessario conoscere le regole fondamentali dell’algebra nonché possedere chiaramente alcune nozioni di base della geometria.
La matematica è una scienza e, come tale, si occupa di relazioni fra quantità o fra forme. In matematica, l’algebra è una specie di stenografia del pensiero poiché permette di rappresentare concisamente molte relazioni di cui si occupa. Fondamentale è la relazione di ***uguaglianza*** che permette di esprimere un’affermazione, una frase. Indichiamo dunque come conservarla e usarla.
Per esempio se affermo che un numero sconosciuto *x è tre*, posso scrivere *x = 3*. Usare il segno di *uguale* equivale ad usare il verbo *essere*. Il segno di uguale può essere usato anche per affermazioni più complesse. Per esempio se dico che ***il doppio di un numero sconosciuto è sei***, posso scrivere ***2X=6***. In questo caso l’uso del verbo “essere” non rivela il numero stesso ma solo ciò che è il suo doppio (“il doppio di un numero ***è*** sei”). Nasce così il problema di ricavare X. Ancora più intricato appare il caso in cui si dica che ***il doppio di un numero sconosciuto più 4 è uguale a 10***. In questo caso il verbo essere è coinvolto in una relazione più complessa che deve essere dipanata. La relazione è una ***frase matematica*** e può essere espressa simbolicamente scrivendo ***2X + 4 =10***. Quest’ultima scrittura ha il vantaggio di sembrare a volte più chiara perché è più breve.
In tutti questi casi occorre manipolare l’espressione al fine di isolare la *x* per renderla soggetto della frase - affermativa grazie al verbo essere - e ottenerne così il valore. Il simbolo “uguale” separa due membri fra loro, il primo a sinistra di solito è il soggetto. Il segno di uguale (=) fa da verbo essere e il secondo membro a destra specifica il soggetto o le sue relazioni con altri dati.
È evidente che la ***manipolazione*** di un’eguaglianza deve rispettare e ***mantenere l’uguaglianza*** stessa per conservare la verità dell’affermazione stessa anche e nonostante il cambiamento eventuale del soggetto. Supponiamo allora di avere un’uguaglianza nella forma più semplice possibile come per esempio a=b. È ovvio che se **a=b**, allora **b=a**. Inoltre l’uguaglianza rimane valida se ambo i *membri* vengono *manipolati nello stesso modo*. È evidente quindi che - data un’uguaglianza - è importante mantenerne la validità nonostante eventuali cambiamenti nel resto della frase algebrica.

Se: $a = b$
Allora $b = a$
inoltre $a+1 = b+1$ (cioè “a più uno” è uguale a “b più uno”)
e pure $5a = 5b$ e analogamente
è pure $-a = -b$ (avendo moltiplicato per -1 ambo i membri)
e anche $1/a = 1/b$ avendo operato su ambo i membri, in ugual modo, il reciproco
(“uno su a” è uguale a “uno su b”)
e così $1/(a-1) = 1/(b-1)$ (“uno su a meno uno” è uguale a “uno su b meno uno”)
ovvero $(a + 3)^2 = (b + 3)^2$
Se $a = b$ allora se sottraggo b da ambo i membri: $a - b = b - b$; e così risulta $a - b = 0$
Se $a = b$ allora $a/b = b/b$ e poiché $b/b=1$ questa volta risulta: $a/b = 1$
E così via, l’uguaglianza si mantiene qualunque operazione si faccia perfettamente uguale sui due membri…

Gli ultimi due passaggi (che portano ad “a-b=0” e ad “a/b=1”) dimostrano che un elemento può scavalcare l’uguale (=). Può cioè cambiare di membro ***purché*** l’operazione applicata che lo riguarda sia ***inversa***. Dunque ***si cambia di membro con l’operazione inversa***. Se stava a sommare va a sottrarsi, se stava a moltiplicare va a dividere e - viceversa e come si può verificare facilmente - se stava a sottrarsi andrà a sommarsi, se stava a dividere andrà a moltiplicare.
Nel caso della potenza bisogna ricordare che essa ha due operazioni inverse. Se si cerca la base si ricorre alla radice, se si cerca l’esponente si ricorre al logaritmo. Da $x^2=9$ si passa a $x = \sqrt[2]{9}$. Diversamente, da $3^x=9$ si passa a $x=\log_3 9$ che si legge: “x è l’esponente che bisogna dare a 3 per ottenere 9”. In pratica, “logaritmo” è sinonimo di “esponente”.

Scala delle operazioni.

Hanno quindi grande importanza le relazioni inverse. A questo proposito ci si può riferire alla **Scala delle operazioni** introdotta in un altro nostro scritto e di cui ricordiamo qui la figura. Ricordiamo che le operazioni commutative sono soltanto due: addizione e moltiplicazione. Si osservi che - essendo commutative - i loro operandi hanno ***nomi uguali*** perché è indifferente quale viene prima e quale dopo e infatti si chiamano rispettivamente “addendi” per l’addizione e “fattori” per la moltiplicazione.
La potenza è ***non*** commutativa; infatti $2^3 = 8$ mentre invece scambiando il 2 con il 3 si ha cioè $3^2=9$ e quindi gli operandi hanno diversa funzione. Proprio per questo i loro nomi sono diversi: “base” ed “esponente”. Di qui nasce la necessità di ***due operazioni inverse***. Se si vuole trovare la ***base*** di una potenza occorre la ***radice.*** P. es. $\sqrt[2]{9} = 3$ *e si legge: la radice quadrata di 9 è 3.*
Se invece si vuole l’***esponente*** della potenza allora occorre l’operazione di ***logaritmo***. P. es. $\log_{10} 100 = 2$; (infatti $10^2=100$). Il logaritmo è sinonimo di ***esponente***. Usando il logaritmo cerco l’esponente della potenza (e non la base della potenza). La frase matematica $\log_{10} 100 = 2$ si legge “***il logaritmo di 100 in base 10 è 2***”. Analogamente p. es. $\log_{10} 1000 = 3$, e p. es. $\log_3 9 = 2$.



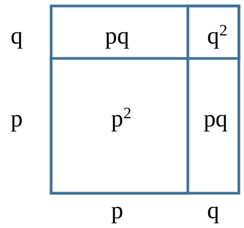
La scala delle operazioni.

In un'espressione qualsiasi hanno precedenza, di calcolo algebrico, le operazioni di gradino più alto, a meno che quelle di rango inferiore siano raccolte in parentesi "di contenimento" le quali fungono da "borse" che racchiudono le operazioni contenutevi dando loro una precedenza che altrimenti non avrebbero. P. es. $2 + 3a^2$ rimane indicata così, ma $(2 + 3)\ a^2 = 5a^2$ perché la parentesi ha la precedenza.
Torniamo alle relazioni che sopra avevamo considerate: 2X=6 e 2X+4=10. Sono relazioni molto semplici volutamente per facilitare i controlli e rendere i ragionamenti e le verifiche più immediate.
Per ricavare X dalla prima relazione, possiamo mantenere l'uguaglianza e isolare X dividendo ***ambo i membri*** per due, ottenendo così 2X/2=6/2, cioè X=3.
Per ricavare X nella seconda relazione, possiamo mantenere l'uguaglianza e isolare X sottraendo 4 da ***ambo i membri***, ottenendo così 2X+4-4=10-4 cioè 2X=6. Ora dividendo ***ambo i membri*** per 2, otteniamo X = 3.
Un principio logico fondamentale dell'algebra è dunque che ***un'uguaglianza rimane valida se ambo i membri* vengono *manipolati nello stesso modo senza ambiguità, incertezze o omissioni***. Ad es. se $x^2 = 4$ e si vuole trovare la base x, allora occorre estrarre la radice quadrata di ambo i membri e si scrive: $x = \sqrt{4} = \mp 2$ in modo di non omettere il possibile valore negativo -2.
Ricordiamo anche che nel gergo matematico, si dice "***equazione***" una ***relazione che contiene un'incognita***.

Grado di un'equazione.

Si noti che in entrambi gli esempi presentati, l'incognita X compare come potenza con esponente uno ($X = X^1$).
Sappiamo che fra le tre operazioni fondamentali di addizione, moltiplicazione, potenza, la più complessa ed elevata è la potenza che non è commutativa e quindi ha ***due operazioni inverse*** a seconda che si voglia ottenere la ***base*** (e allora si esegue la ***radice***) oppure l'***esponente*** (e allora si esegue il ***logaritmo***). Pertanto l'esponente con cui compare l'incognita ha una grande importanza e ricavare l'incognita può risultare particolarmente difficile, comunque in generale è impossibile se l'esponente è uguale o maggiore di 5. Si dice "grado" il massimo esponente presente nell'incognita x in una relazione con l'incognita che compare con diversi esponenti interi $x=x^1, x^2, x^3, x^4, ...$ Dunque $ax + b = 0$ è una relazione $P_1(x)=0$ detta "equazione di ***primo grado***".
La relazione $ax^2 + bx + c = 0$ è un polinomio $P_2(x)=0$ posto uguale a zero: è detta "equazione di ***secondo grado***".
La $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ è un'equazione $P_3(x)=0$ ed è di ***terzo grado***. E così via.

Nel piano cartesiano, i polinomi $y = P_n(x)$ sono rappresentati da linee continue curve di grado ***n***. *Sono caratterizzate dal fatto che hanno - al massimo –* ***n*** *intersezioni (punti in comune) con una retta*. (Grado ⇔ intersezioni).
L'equazione di secondo grado è risolvibile in generale. La risoluzione generale comporta una manipolazione particolarmente intricata ma anche piuttosto istruttiva riguardo ai ***procedimenti algebrici*** che si possono usare in genere e pertanto l'esponiamo qui di seguito.



La figura rappresenta visivamente il quadrato del binomio p+q mediante il calcolo dell'area del quadrato di lato p+q.
Come si vede chiaramente all'interno dei quattro quadrilateri, l'area totale è data da $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$
In generale una qualsiasi formula può essere dimostrata o resa di evidente comprensione in molti modi diversi.

Soluzione algebrica dell'equazione di secondo grado. Discriminante. I numeri immaginari. Numero complesso.

L'equazione di secondo grado nella sua forma più generale si può rappresentare col trinomio uguagliato a zero:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

in cui a, b, c sono "coefficienti" noti, cioè parametri, vale a dire quantità numeriche qualsiasi ma supposte note, ben determinate.

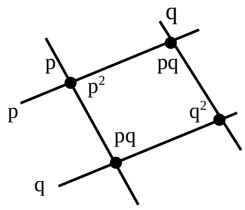
(Se il trinomio non fosse uguagliato a zero ma ad un numero n qualunque a secondo membro, basterebbe portare quest'ultimo a primo membro e inglobarlo nel termine c per riottenere comunque lo zero a secondo membro).

Naturalmente l'incognita è x. Per ricavarla dovremmo estrarre la radice quadrata di x^2 ma al contempo dovremmo riuscire a separare x dal secondo termine bx. Dovremmo cioè arrivare alla forma in cui l'incognita è isolata, vale a dire x = f(a, b, c) intendendo con f() un insieme di operazioni eseguite solo sui coefficienti a, b, c liberate dall'incognita.
L'equazione è considerata un trinomio giacché formata da tre "nomi" che si succedono sommati fra loro e cioè ax^2, bx, c.
Come si è già visto, il quadrato di un binomio è: $\boldsymbol{(p+q)^2} = (p+q)\ (p+q) = p^2 + pq + pq + q^2 = \boldsymbol{p^2 + 2pq + q^2}$, ovverosia

"il quadrato di un binomio è uguale al quadrato del primo + il doppio prodotto del primo per il secondo + il quadrato del secondo" = I^2+2I°II°+II^2.

Per avere un'idea più immediata, immaginiamo di interpretare l'operazione di somma come affiancamento di rette parallele; l'operazione di prodotto come intersezione di rette. Sicché avremo di conseguenza che, per esempio, il prodotto di somme **(p + q) (p + q) = (p+q)²** può essere rappresentato come in figura; questa si presta ad eseguire il calcolo e fornisce il risultato; basta infatti leggere ciò che è scritto all'interno presso i punti di intersezione (la retta p che interseca un'altra p dà luogo a p^2, la retta p che interseca invece la retta q dà luogo a pq).

.



➔ = $p^2 + pq + pq + q^2$ = ***$p^2 + 2pq + q^2$***

Ci si può sincerare che la formula sia "giusta" sottoponendo in più la formula ad una *prova pratica*. Ciò, per es. scegliendo dei numeri interi al posto delle lettere. Poniamo allora p=2 e q=3 e avremo che (2+3) per (2+3) = (5 per 5) = 25 ***deve dare*** risultato 25 perché lo sappiamo! Applicando la formula avremo: (2+3) (2+3) = 2^2 , + 2 volte 2 per3, + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25. Dunque la formula è giusta anche perché controllata in un caso pratico!...

Osserviamo che il trinomio sopra detto ($ax^2 + bx + c$) somiglierebbe a un quadrato perfetto - almeno nel primo termine ax^2, se al posto di "a" vi fosse a^2.
Approfittando del fatto che ***un'uguaglianza - o un'equazione - rimane valida*** se ambo i membri vengono ***manipolati allo stesso modo***, moltiplichiamo ambo i membri per "a", ottenendo: $a^2x^2 + abx + ac = 0a$. Naturalmente 0a=0 e quindi $a^2x^2 + abx + ac = 0$.
A questo punto osserviamo che il secondo termine abx favorirebbe uno sviluppo quadratico se somigliasse a un doppio prodotto cioè se si presentasse come 2abx. Tuttavia moltiplicare ambo i membri per 2 non conviene perché il primo termine diventerebbe allora 2 a^2x^2 e non sarebbe più un quadrato perfetto. Un numero che si presta a un doppio prodotto e contemporaneamente a un quadrato perfetto è il numero 4. Moltiplichiamo allora ambo i membri per quattro e otteniamo $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ per 4, cioè: $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$.

In questo modo abbiamo ottenuto non solo che il primo termine $4a^2x^2$ appaia come il quadrato perfetto di 2ax, ma anche che il secondo termine appare come il doppio prodotto di 2ax per b, cioè 2per2ax(b) = 4abx. Si osservi pure che $(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$.
Tuttavia l'equazione equivalente a quella di partenza e a cui eravamo arrivati, è $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$ in cui *manca il termine + b^2*. Possiamo fare in modo però di ***aggiungerlo e toglierlo*** contemporaneamente, rispettando così l'uguaglianza.
Otteniamo allora: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$.

Ora i primi tre termini formano un quadrato perfetto e possiamo riscrivere l'espressione nella forma: $(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$ e quindi $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$.

L'incognita x risulta ora isolata nella parentesi la quale può essere ricavata come radice - essendo questa operazione l'inversa della potenza quando se ne vuole ottenere la base. Pertanto: $2ax + b = \mp\sqrt{b^2 - 4ac}$. Isolando 2ax abbiamo $2ax = -b \mp\sqrt{b^2 - 4ac}$

E infine: $x = \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

riassunto del procedimento: $ax^2 + bx + c = 0$
$a^2x^2 + abx + ac = 0 \cdot a$ (0a significa "zero per a")
$a^2x^2 + abx + ac = 0$
$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \cdot 4$ (04 significa "zero per 4")
$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$
$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$ e poiché $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2$ si ha:
$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$ cioè $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
$2ax + b = \mp\sqrt{b^2 - 4ac}$ avendo estratto la radice di ambo i membri;
$2ax = - b \mp\sqrt{b^2 - 4ac}$ e quindi:

$$\boxed{x = \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Il doppio segno ∓ indica che le possibili soluzioni dell'equazioni sono due. Una soluzione si ottiene usando il segno "-" e l'altra usando il segno "+".

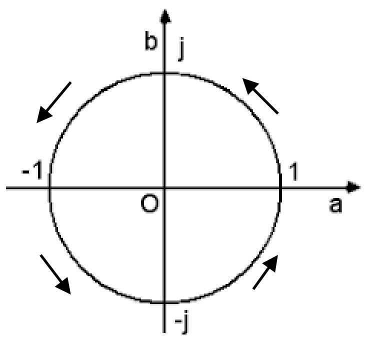
Inoltre la presenza della radice, implica che il radicando dovrebbe essere positivo o nullo – altrimenti, se fosse negativo, sarebbe *privo di senso eseguire l'operazione di radice* (***la radice quadrata di un numero negativo non esiste nel campo dei numeri reali***); tuttavia si rimedia a questa evenienza utilizzando i numeri cosiddetti "immaginari" che si ottengono come segue; supponiamo che il numero N sia positivo. Di conseguenza (-N) è negativo per ipotesi. Allora la radice di –N può essere considerata radice di (-1)N cioè $\sqrt{-1}\sqrt{N} = \mp i\,\sqrt{N}$ avendo posto "*per definizione*"

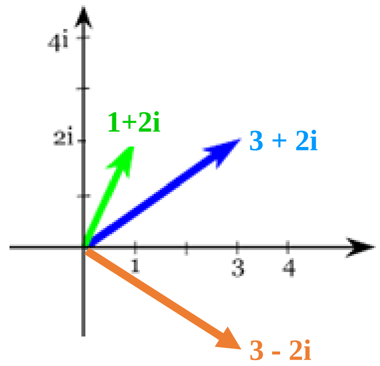
$$\underline{\boldsymbol{\sqrt{-1} = \mp i}}$$

La lettera "i" sta per "immaginario" giacché non esiste alcun numero reale il cui quadrato dia luogo ad un numero negativo!
Il lettore resterà perplesso di fronte a questa "definizione" che a tutta prima sembra illusoria o bizzarra se non addirittura fuorviante. Tuttavia il grande matematico Gauss mostrò che mentre i numeri aumentano di grandezza aggiungendo 1, l'introduzione ***dell'immaginario*** "i" si presta alla rotazione della quantità, si presta cioè al calcolo vettoriale; se ne ha una riprova nel calcolo dei circuiti elettrici in cui i numeri immaginari svolgono un ruolo fondamentale.

Gauss utilizzò il piano cartesiano per illustrare le possibilità offerte dai numeri immaginari.
Riservò un asse, p. es. quello orizzontale ai numeri reali e dedicò l'altro asse, verticale, ai numeri immaginari. In questo piano, detto "***piano di Gauss***" ha senso parlare di un numero complesso z definito come somma z = a+ib d'una parte reale "a" più una immaginaria "ib". Nella figura di sinistra, consideriamo il punto (1; 0) sull'asse reale (a). Qui poniamo il numero 1 di partenza. Moltiplicando 1 più volte successivamente, sempre per "i", otteniamo man mano; 1*i = i;   i*i = -1;   -1*i = -i;   -i*i= - (-1)= 1

Si ha così una rotazione che *<u>parte da 1 e torna ad 1</u>* [in posizione (1;0)]. Ruotando si parte da 1 e si passa ad ***<u>i, -1, -i , 1</u>*** tornando cioè di nuovo al numero iniziale 1.
Nella figura di destra si può notare che il numero complesso 1+2i (indicato dalla freccia verde) è rappresentato da un punto diverso da quello che p. es., rappresenta 3+2i (freccia blu).





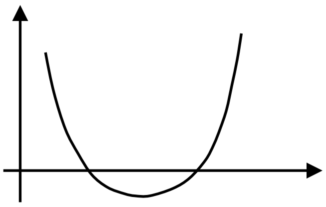
*Un numero "**<u>complesso</u>**" è la somma di un numero reale con un numero immaginario, cioè della forma **<u>a+ib</u>**.*
*Due numeri complessi si dicono "**<u>coniugati</u>**" se differiscono solo per il segno della parte immaginaria cioè se sono **<u>a-ib</u>** e **<u>a+ib.</u>***
I numeri 3 - 2i (rosso) e 3 + 2i (blu) sono due numeri complessi coniugati (le parti immaginarie hanno segni contrari).

Il segno (positivo o negativo) della quantità sotto radice nella soluzione dell'equazione di secondo grado, svolge dunque un ruolo decisivo nel determinare la qualità delle soluzioni.
La suddetta quantità sotto radice prende il nome di "discriminante" ed è indicato con la lettera greca Δ.
La formula risolutiva dell'equazione di secondo grado (che rappresenta l'***intersezione di una parabola con l'asse x***) può essere dunque riscritta come segue con $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$:

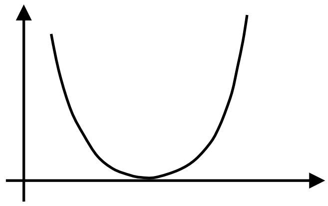
$$x = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \nearrow \; x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \searrow \; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

<u>Se il discriminante Δ è positivo</u>, si hanno due soluzioni reali e distinte $x_1 \neq x_2$, e si usa propriamente il segno ∓ ("meno o più"); la parabola traversa l'asse delle x in due punti distinti.
<u>Se il discriminante Δ è nullo</u>, allora si hanno due soluzioni reali e coincidenti $x_1=x_2$. La parabola "tocca" l'asse x cui risulta tangente in un "punto doppio" (cioè in un singolo punto considerato "doppio").
<u>Se il discriminante Δ è negativo</u>, allora si hanno due soluzioni complesse coniugate del tipo $z_1 = p - iq$, $z_2 = p + iq$. La parabola non traversa l'asse x in alcun punto "reale".

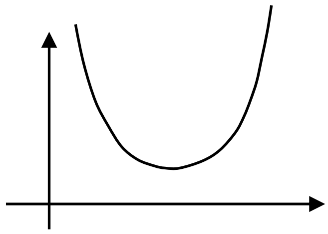
Il ***significato geometrico*** dei coefficienti ***<u>a, b, c</u>*** è naturalmente ***diverso*** se l'equazione di secondo grado si riferisce a curve diverse, per es. a una ***parabola*** oppure a una ***circonferenza*** o ad ***altro*** ancora. P. es. $\boldsymbol{x^2+y^2+ax+by+c=0}$ "è l'equazione" d'una circonferenza.



$\Delta > 0$
Due intersezioni reali e distinte



$\Delta = 0$
Due intersezioni reali e coincidenti



$\Delta < 0$
Due intersezioni complesse e coniugate

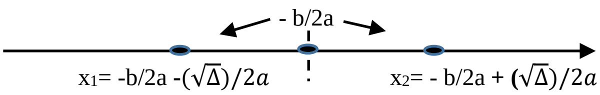
Valore centrale delle due soluzioni dell’equazione di secondo grado.

Le soluzioni sopra viste possono anche essere espresse nella forma di due frazioni:

$$x=-b/2a \mp (\sqrt{\Delta})/2a$$

interpretabile come “un numero centrale (-b/2a) meno o più qualcosa (cioè “meno o più la radice di...”).

Dunque il valore “-b/2a” rappresenta un valore equidistante fra le due soluzioni x_1 (che è calcolato col segno – e quindi è minore di x_2 che vuole il segno + e quindi è maggiore di x_1).
Questo valore centrale è anche il valore medio delle due soluzioni.



ll problema e i risultati algebrici fin qui esposti, possono sembrare difficili se non astrusi ma possono invece essere rappresentati e illustrati visivamente mediante la geometria analitica. Anticipiamo che il valore centrale - b/2a. nel caso della parabola, è il valore numerico <ins>*dell’ascissa del vertice e del fuoco della parabola con asse di simmetria parallelo all’asse y*</ins>.

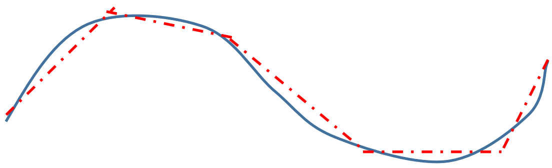
La retta. L’equazione di primo grado è l’equazione di una retta. Visualizzazione cartesiana.

La relazione y = f(x) si legge “y è funzione di x”. La parola funzione implica un “funzionamento” nel senso che scelto un valore di x, vengono eseguite certe operazioni su questo valore il quale viene così elaborato per ottenere un risultato y. Questo tipo di funzionamento è in realtà concretizzato in una calcolatrice da tavolo in cui si sceglie un valore x “d’ingresso” e si scelgono alcune funzioni - come somme o prodotti e così via - fino ad ottenere un risultato y in uscita.

$$x \longrightarrow \boxed{f()} \longrightarrow y$$

Il risultato y ottenuto è dovuto alla scelta della ***variabile indipendente x*** inoltre anche al tipo di funzionamento f() preparato sulla calcolatrice. Pertanto scrivendo y = f(x) abbiamo che ***y è la variabile dipendente*** dalle scelte effettuate su x e su f() che è il tipo di funzionamento imposto. Pertanto la funzione matematica non è altro che un tipo di funzionamento che permette il passaggio da una variabile indipendente ad una che dipende dalle nostre scelte.
Non c’è dubbio che fra tutte le funzioni possibili, la più semplice ed importante è quella che corrisponde a una retta e per varie ragioni.

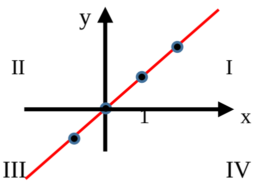
1. È la funzione più semplice perché l’andamento è “lineare”, cioè non ci sono sbalzi numerici disordinati né deviazioni ad andamento curvilineo più o meno graduale.
2. La sua rappresentazione cartesiana è una linea dritta, senza deviazioni
3. È facilmente appresa e usata con naturalezza.
4. È molto utile è quindi importante per descrivere un fenomeno, fare previsioni come l’andamento dei voti in politica, crescita di peso in campo pediatrico, descrizione almeno parziale di fenomeni complessi come nelle scienze politiche e sociali, in psicologia biologia, fisica, economia, matematica, …
5. In geometria analitica la retta corrisponde una funzione di primo grado, cioè del tipo y=mx+n ovvero ax+by+c=0 ove sia x che compaiono con esponente unitario (cioè 1).
6. Può approssimare, almeno in piccoli ambiti, quasi qualunque altra funzione anche se questa si presenta molto variabile (in blu); infatti può approssimarla con un certo grado di approssimazione mediante una spezzata (in rosso) formata da un certo numero di segmenti, ciascuno dei quali è rettilineo.



Abbiamo detto che l'equazione che rappresenta una retta è di primo grado in x e in y.
Essa si può presentare in forma implicita: ax+by+c=0; oppure in forma esplicita rispetto a y quando è scritta y=mx+n o magari esplicita rispetto a x in forma analoga, cioè x=....
Esplicitando la forma implicita si ha: by= -ax – c si ottiene y = - (a/b)x – c/b; paragonando quest'ultima espressione con la forma esplicita y=mx+n si vede che m =-a/b e n=-c/b.
Per comprendere la retta in geometria analitica conviene sia ricavarne teoricamente l'equazione generale, sia prendere confidenza con esercizi su casi particolari.
La forma algebrica più semplice è certamente quello esplicita rispetto a y che è di solito la più usata intendendo y come variabile dipendente.
Una semplice retta è y=x in cui m=1 e n=0. La retta in questione si scriverebbe y=1x+0 e cioè appunto y=x.
Quest'ultima scrittura si legge: la variabile dipendente y è uguale a x. Pertanto numericamente avremmo volta per volta uno stesso numero per x e per y.

y=x

X	0	1	-1	2	½	...
Y	0	1	-1	2	½	.



Nel reticolo quadrangolare dei punti P(x; y) nel piano cartesiano, segniamo i punti (0,0), (1;1), (-1;-1), (2;2) ...; vedremo subito che essi sono allineati lungo la bisettrice (in rosso) del primo e del terzo quadrante (I e III).

Un'equazione di primo grado è riconducibile alla forma: mx + n = 0.

Come si vede l'incognita x qui compare una sola volta in un termine isolato. L'equazione si risolve facilmente facendo in modo che al primo membro rimanga soltanto l'incognita, giusto per costruire la frase "x è ..." ottenendo così x=...
Portiamo n al secondo membro ricorrendo all'operazione inversa della somma cioè sottraendo n da entrambi i membri:

mx + n - n = 0 - n. Otteniamo mx = -n

Ora liberiamo x dal fattore m che sta a moltiplicare e quindi andrà a dividere il secondo membro, ottenendo x = -n/m.
Come si vede si perviene alla soluzione mediante un procedimento relativamente semplice.
Allo scopo di darne una rappresentazione visiva nel piano cartesiano delle coordinate (x, y), osserviamo che l'equazione di partenza era priva dell'ordinata y, quindi l'equazione, priva del simbolo y, non si potrebbe rappresentare nel piano cartesiano. Potremo però introdurla *al posto dello zero* imponendo la condizione **y=0** che deve appunto *valere insieme* all'equazione di partenza.
Pertanto è opportuno rappresentare l'equazione con un ***sistema*** in cui y ***compaia*** sia in ***mx + n = y*** e sia in ***y = 0***. Ricordando che se *a = b* allora *b = a* (scambiando i due membri di posto) l'equazione *mx+n=y* può essere riscritta come: *y=mx+n* giacché la *y* si presta meglio come soggetto del discorso algebrico in quanto compare già isolata (a differenza della x che è legata ad m).
In sostanza il sistema delle due equazioni suddette è allora:

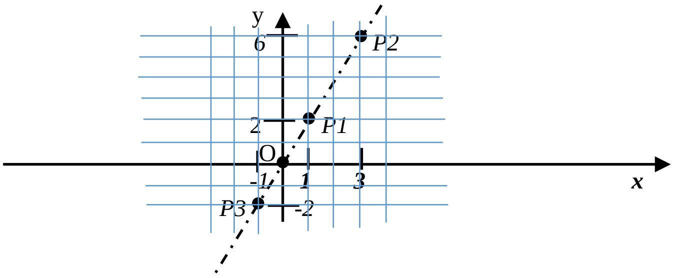
$$\begin{cases} y = mx + n \\ y = 0 \end{cases}$$

Riassumendo, il sistema di ***y = 0*** con ***y = mx + n,*** equivale a scrivere *0 = mx + n* che a sua volta equivale a *mx + n = 0*. Abbiamo così rimediato alla originaria assenza della ordinata y nell'equazione di partenza ma ora sappiamo che essa equivale a cercare le intersezioni comuni fra la retta di equazione y=0 (asse delle ascisse) e la retta *y=mx+n*. Ricordiamo che l'equazione y=0 è vera per tutti i punti dell'asse x e pertanto questo asse può dirsi l'immagine visiva dell'equazione stessa (y=0 è di primo grado in y).
Ci si pone allora la domanda: di cosa corrisponda all'equazione y=mx + n. In generale si sa che questa equazione corrisponde ad una retta.
In ogni caso, dal momento che m ed n sono parametri (cioè numeri qualsiasi ma ben determinati di volta in volta) poniamo che m sia 2 ed n sia zero, tanto per fissare le idee con un semplice esempio.

L’equazione allora diventa y=2x. Sia x che y sono numeri variabili che possono essere scelti a caso purché legati fra loro dall’equazione medesima. L’equazione y=2x si legge: “y è il doppio della x”. Per es. per x=1 allora y, che è il doppio, deve essere 2 e così via. Se x= 3, y = 6. Per x=0, y = 0, se x= -1, y= -2 ... Nasce così la tabella:

x	y	
1	2	P1
3	6	P2
-1	-2	P3
0	0	P4 = O

Abbiamo ottenuto una tabella con coppie ordinate di valori x e y. Sappiamo che corrispondono ai punti P1,... P4. Rappresentiamoli visivamente in un sistema di riferimento cartesiano. La tabella può indifferentemente essere scritta in orizzontale oppure in verticale.

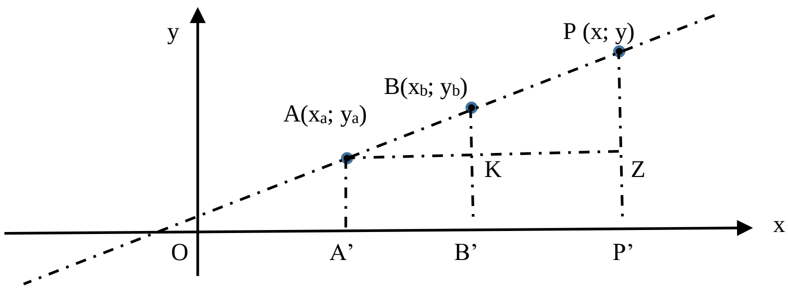


Osserviamo che i quattro punti ottenuti sono allineati. Dunque l’equazione y=2x appare rappresentata da una retta passante per l’origine e convenientemente inclinata in modo tale che la y sia sempre il doppio della x.
Infatti l’equazione y=2x si legge: “***y è il doppio di x***”.

In realtà, qualunque equazione di primo grado in x e y corrisponde ad una retta nel senso che i valori di x e y che soddisfano l’equazione, ogni volta formano coppie di coordinate che si trovano su una retta ben determinata. Per esserne certi in generale, è tuttavia necessario darne una dimostrazione che passiamo ad esporre.

Equazione della retta e possibili espressioni generali nel sistema di riferimento cartesiano. Significato angolare di m.

Nel sistema di riferimento cartesiano a due dimensioni in cui i punti sono individuati con le coppie ordinate di numeri reali x e y, consideriamo una retta qualsiasi e tre punti qualunque su di essa, ovviamente non coincidenti A (x_a; y_a), B (x_b; y_b) e P (x; y).



Dai punti A, B e P tracciamo le perpendicolari all’asse delle x: queste sono naturalmente parallele fra loro perché tutte perpendicolari ad una stessa retta che è l’asse delle x e che incontrano in A’, B’, P’.
Da A tracciamo la parallela all’asse delle x fino a incontrare il segmento BB’ in K e il segmento PP’ in Z.
I due triangoli ABK e APZ sono simili perché i loro lati sono in proporzione; infatti l’angolo PAZ è lo stesso per i due triangoli; inoltre gli angoli AKB e AZP sono retti perché formati da perpendicolari e da una parallela ad una stessa retta che è l’asse x.
(In alternativa, le parallele AA’, BB’ e PP’ sono tagliate dalle trasversali AP e AZ e quindi i suddetti triangoli sono simili per Talete).

Pertanto:

PZ : BK = AZ : AK

Ma considerando il rettangolo AA’P’Z, si ha:

PZ = PP’- ZP’ = PP’ – AA’ = $y – y_a$
BK = BB’ - B’K = BB’ – AA’ = $y_b - y_a$
AZ = A’P’ = OP’ – OA’ = $x - x_a$
AK = A’B’ = OB’ - OA’ = $x_b - x_a$

Sostituendo si ha: $(y - y_a) : (y_b - y_a) = (x - x_a) : (x_b - x_a)$

$$\boxed{\frac{(y - y_a)}{(y_b - y_a)} = \frac{(x - x_a)}{(x_b - x_a)}}$$

↔ **<u>Equazione della retta per due punti A e B</u>**.
"*<u>cioè della retta passante per i 2 punti: A e B</u>*"

Manipoliamo ora l'equazione per ricavare la variabile y.

$$(y - y_a) = \frac{(y_b - y_a)}{(x_b - x_a)}(x - x_a)$$

Ponendo la <u>frazione di numeri noti uguale ad m</u> si ha:

$(y - y_a) = m\,(x - x_a)$ liberando la y come soggetto d'una frase algebrica, si ha:
$y = m\,(x - x_a) + y_a$ da cui, liberando anche la x, si trae:

$y = mx + y_a - m\,x_a$ (ovvero $y - mx = y_a - m\,x_a$)

come si può notare il gruppo di simboli $y_a - m\,x_a$ costituisce un termine noto giacché formato da numeri che si suppongono noti.

Pertanto è lecito porre tutto il gruppo uguale ad un numero "n" conosciuto, detto appunto "termine noto n". La relazione diventa allora:

$$\boxed{y = mx + n}$$

↔ **Equazione esplicita rispetto ad y** della retta

*Questa è **<u>l'equazione della retta</u>** in forma **<u>esplicita</u>** rispetto ad y.*
*Il parametro **<u>m è</u>** detto **<u>coefficiente angolare</u>** (perché determina l'angolazione della retta rispetto agli assi.*
*Il **<u>termine noto n</u>** determina invece la posizione della retta. Più in alto o più in basso a seconda del suo valore.*

<u>L'equazione della retta è comunque sempre di primo grado sia in x e sia in y.</u>

L'equazione della retta per due punti A e B si può esplicitare, in alternativa, rispetto a x; (rimanendo sempre di primo grado sia in x e sia in y).

Se <u>non</u> si esplicita l'equazione di partenza, si può pervenire alla forma implicita della retta che si scrive ax+by+c=0.
In questa forma esplicita i parametri a, b, c sono numeri – ovviamente, non pedici – e sono detti "coefficienti" – cioè parametri moltiplicatori di x o di y che invece sono variabili a piacere.

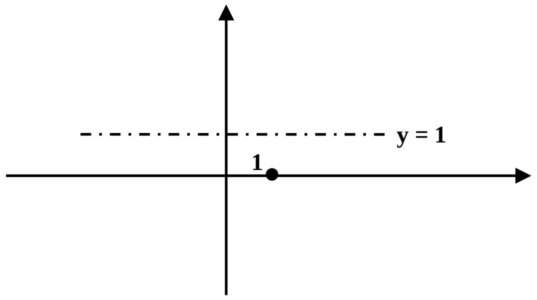
$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

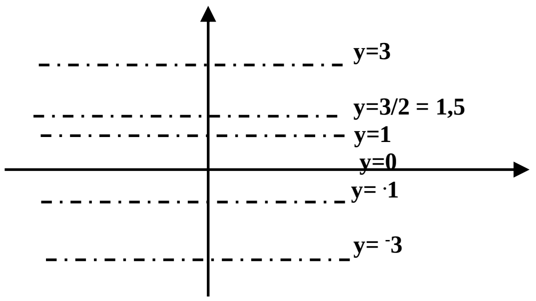
↔ **Equazione implicita** della retta

Esplicitando questa relazione rispetto ad y se ne riottiene la forma esplicita che è ora: $y = -(a/b)\,x - c/b$ ove **<u>m =– a/b</u>** e **<u>n= - c/b</u>**.
La forma implicita è utile nel caso in cui si voglia l'equazione dell'asse delle y. Questa equazione è x=0 nel caso particolare in cui a=1, b=c=0. Avvertiamo che la forma implicita è necessaria poiché non si può ottenere l'equazione x=0 dalla forma esplicita rispetto ad y.

<u>Esempi di rette. Significato geometrico di n.</u>

Avendo dovuto procedere con la teoria, è giusto ora illustrare alcuni esempi di rette che ne chiariranno meglio il significato.





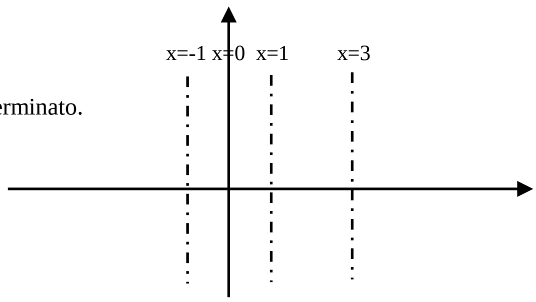
Nelle figure possiamo vedere il significato visivo di alcune equazioni di primo grado che raffigurano quindi rette.
A sinistra l'equazione y=1 va letta "y è uguale ad 1". Dobbiamo domandarci quali siano i punti in cui ciò sia vero, cioè si verifica. La risposta è che ciò si verifica in tutti i punti di una retta che hanno distanza unitaria dall'asse x. Tutti questi punti, nel loro insieme, sono disposti su una retta parallela all'asse delle x ad altezza uno. A destra, nella figura, abbiamo altre equazioni rappresentate da altrettante rette tratteggiate, tranne la y=0 che è rappresentata dall'asse x (non tratteggiato).

Si può notare, **man mano che il parametro n aumenta, cresce anche la distanza della retta corrispondente dall'asse x**. Tutte le equazioni sono del tipo y = n (n è il termine noto; l'equazione completa in generale è $y=mx + n$ ma se il termine mx non compare è perché m=0 e così $mx = 0x = 0$, dunque non dà contributi alla somma di $mx + n = 0 + n = n$).
Si noti che tutte le equazioni del tipo $y = n$ corrispondono a rette parallele all'asse delle x

Se $n < 0$ la retta è una parallela al di ***sotto*** dell'asse x.
Se $n = 0$ la retta è addirittura ***l'asse x***.
Se $n > 0$ la retta è una parallela al di ***sopra*** dell'asse x.

Naturalmente le parallele all'asse y hanno equazioni del tipo x = k.
Naturalmente k è un parametro, ossia un numero qualunque ma ben determinato.

Se $k < 0$ la retta è una parallela a ***sinistra*** dell'asse y.
Se $k = 0$ la retta è addirittura ***l'asse y***.
Se $k > 0$ la retta è una parallela a ***destra*** dell'asse y.

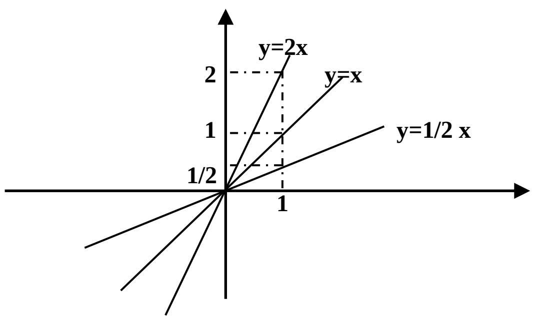


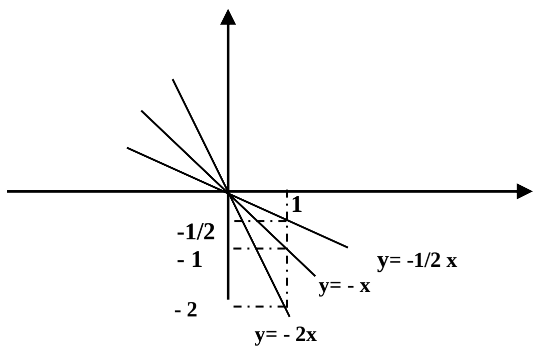
Significato geometrico di m ed n.

Nell'equazione y=mx + n, la lettera m è usata per indicare il "***coefficiente angolare***" della retta corrispondente all'equazione.
In generale, in geometria analitica una relazione di primo grado corrisponde ad una retta. Il coefficiente angolare è un numero ben determinato, determina l'angolazione della retta rispetto agli assi x e y ed è riconoscibile poiché ***per convenzione si deve trovare nella forma esplicita rispetto ad y (che è del tipo y=mx+n) e deve moltiplicare la variabile x e non la y***.
Eccone alcuni esempi.

Equazione della retta	Coefficiente angolare
Y=3x	3
(1/3)y =x → y= 3x	3
2x-3y=0 → -3y=-2x → 3y=2x → y=2/3 x	2/3
y=x	1
2x-6y+5=0 → 2x=6y-5 → y=(2/6)x+5/6	1/3
x=4/3y → y=(3/4)x	¾
y=-x	-1

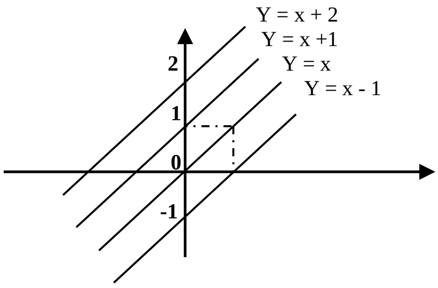
Si osservino ora le figure in cui le inclinazioni delle rette corrispondono ad altrettanti coefficienti angolari. Si osservi per es. che in ogni punto della retta y=x il valore numerico di y è uguale a quello della x, Analogamente sulla retta y=2x in ciascun suo punto la y risulta il doppio della x e così via.





La retta y=2x passa per (1;2). La y=x per (1;1). La retta y=1/2x per (1;1/2). La y=2x si legge "y è uguale al doppio della x". La y=x "y è uguale a x". La y=1/2 x "y è un mezzo di x" oppure "y è la metà di x".
La retta y= - 2x passa per (1;-2). La y=-x per (1; -1). La retta y=1/2x per (1;-1/2). Nella y=-2x si legge "y è uguale a meno il doppio della x". Nella y=-x "y è uguale a meno x". Nella y=-1/2 x "y è un mezzo di meno x" oppure "y è la metà di meno x".

In generale, se all'equazione si aggiunge un termine noto n (con segno + o -), la retta rappresentata mantiene la propria angolazione ma si sposta parallelamente a sé stessa in alto (se n aumenta) o in basso (se n diminuisce).



Rette parallele o perpendicolari.

In geometria analitica due rette **parallele** sono rappresentate da equazioni di primo grado che, se scritte in forma esplicita rispetto a y, hanno **identico valore del coefficiente angolare m** (ma differiscono soltanto per il termine noto). Dunque abbiamo la:

condizione di parallelismo: $\boxed{m_{//} = m}$

In geometria analitica due rette **perpendicolari** sono rappresentate da equazioni di primo grado che, se scritte in forma esplicita rispetto a y , hanno valori **reciproci e di segno contrario per i coefficienti angolari**:

condizione di ortogonalità: $\boxed{\mathbf{m_{or} = - 1/m}}$

la condizione di perpendicolarità può essere anche ricordata con la formula equivalente $\mathbf{mm_p = - 1}$

Retta con passaggio per un punto P_0 $(x_0; y_0)$.

Poiché un'equazione di primo grado rappresenta una retta nel piano cartesiano, essa può "passare" (essere soddisfatta) per gli infiniti punti che le sono propri. In alcuni casi possiamo desiderare che una retta indeterminata passi per un certo punto da noi voluto $\mathbf{P_0}$. Questa retta potrà avere una qualsiasi angolazione rispetto agli assi di riferimento.
Ciò significa che l'equazione – ovviamente di primo grado – deve essere comunque "soddisfatta" dalle coordinate $(x_0; y_0)$ del punto medesimo. Questo sarà l'unico punto attraverso il quale la retta passa sicuramente; per il resto, ogni altro punto è possibile.
Tutto ciò accadrà sicuramente se, sostituendo le variabili x, y (dell'equazione della retta) con i valori numerici x_0 y_0 (coordinate del punto in questione) l'uguaglianza sarà mantenuta.

Questa è la "condizione di passaggio della retta per un punto dato". Può essere chiamata anche "condizione d'appartenenza del punto alla retta assegnata mediante equazione di 1° grado".
Sappiamo, in generale, che per due punti passa un'unica retta mentre invece ora c'interessa il passaggio per un solo punto, non per due punti. Allora la retta resta indeterminata poiché esistono infinite rette che passano per un solo punto dato; a questo proposito, tutte insieme formeranno una specie "stella" di rette (chiamato convenzionalmente "fascio proprio"). Tutte queste rette possibili hanno però quel punto in comune come se fosse "il centro della stella".

Sappiamo che una retta ha equazione generale $\mathbf{y = mx + n}$ ma sappiamo anche che nel momento in cui una retta generica "passasse" per il punto $P_0(x_0; y_0)$, diventerebbe vera l'uguaglianza $\mathbf{y_0=mx_0+n}$. La differenza fra le due scritture è che la prima (y=mx+n) può essere soddisfatta da qualsiasi coppia di valori x, y del piano (essendo indeterminati m ed n, anche se in qualsiasi momento m ed n possono essere scelti in modo opportuno), mentre la seconda ($\mathbf{y_0=mx_0+n}$) può essere soddisfatta solo dalla coppia $\mathbf{(x_0; y_0)}$ ma uno solo dei due parametri m ed n può essere scelto liberamente mentre l'altro dovrà essere determinato adeguatamente di conseguenza, risolvendo l'equazione venutasi a creare.
Possiamo pensare così che l'equazione y=mx+n rappresenti qualsiasi retta e, potenzialmente, qualsiasi punto del piano cartesiano fino al momento in cui i parametri m, n e le variabili x, y non siano determinati, mentre l'equazione $y_0=mx_0+n$ rappresenta solo un punto sebbene indichi genericamente una qualsiasi retta che vi passerebbe.

Mentre l'equazione generale **y=mx+n** rappresenta tutte le rette possibili e immaginabili nel piano, al contrario l'equazione $\mathbf{y_0=mx_0+n}$ rappresenta effettivamente solo il punto $\mathbf{P_0}$ $\mathbf{(x_0; y_0)}$ lasciando libera la fantasia d'immaginare una qualsiasi retta che vi passa essendo indeterminati m ed n. D'altra parte nell'equazione non compaiono le variabili x, y e quindi non c'è modo di scegliere altri punti diversi da $\mathbf{P_0}$ $\mathbf{(x_0; y_0)}$.

In questo senso noi vorremmo "unire" le due equazioni per avere entrambi i vantaggi (libertà d'immaginare la retta e passaggio per il punto) ma senza introdurre una sostanziale differenza fra loro (il risultato deve essere ancora un'equazione di primo grado se si vuole una retta). Quindi le confrontiamo fra loro. Le scriviamo nella forma più comoda: $y-mx-n=0$ e $y_0-mx_0-n=0$; dal momento che vogliamo siano fra loro compatibili, verifichiamo che la loro differenza sia zero.

$$\begin{cases} y - mx - n=0 \\ y_0 - mx_0 - n=0 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro abbiamo: $y-mx-y_0+mx_0=0$, cioè $\mathbf{y-y_0 = m(x-x_0)}$.
Questa equazione è di primo grado e quindi è una retta nelle variabili x, y. Inoltre sostituendo le due coordinate x_0 e y_0 al posto di x e y otteniamo 0=0 che è giusta e quindi è vero che la retta "passa" per il punto $P_0(x_0; y_0)$ voluto. Notiamo che "n" è scomparso; del resto la posizione della retta è determinata dal punto $P_0(x_0; y_0)$ e non più da n, mentre invece rimane libera la scelta dell'angolazione grazie alla presenza del fattore angolare m.

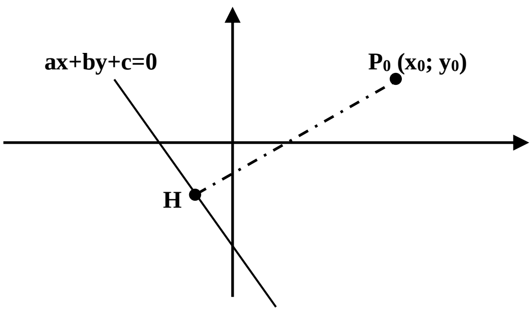
Con m, indichiamo un coefficiente angolare parametrico – cioè qualsiasi ma ben determinato; usando la lettera m anziché un numero particolare, indichiamo sia il caso in cui il coefficiente è ben noto numericamente, sia il caso in cui invece il coefficiente rimane da determinare. Notiamo ancora che ponendo x_0 al posto di x e ponendo anche y_0 al posto di y, l'equazione diventa subito: 0 = 0 che è una frase algebrica ***vera*** e pertanto è vera la sua premessa che l'equazione "è una retta che passa per $P_0 (x_0; \mathbf{y_0})$.

"Retta passante per un punto" o "retta per un punto" $\boxed{\mathbf{y-y_0 = m(x-x_0)}}$

L'equazione si presenta in generale con simboli semplicemente nominali (cioè che sono solo nomi e quindi fungono da indicatori), non numericamente specificati. Si tratta quindi di una formula che, come ogni formula, si presta a molti e diversi usi.
P. es. se si vuole la retta passante per un punto $P_0(x_0; \mathbf{y_0})$ e parallela ad una retta data di cui quindi si conosce il coefficiente angolare **m**, basterà sostituire i dati nella formula ed il problema sarà abbastanza facilmente risolto. *La formula è utile, val la pena ricordarla.*
Come altro esempio, se si vuole la retta passante per il punto $P_0(x_0; \mathbf{y_0})$ e perpendicolare ad una retta data, di coefficiente angolare dato m, basterà applicare la formula imponendo - secondo la condizione di perpendicolarità - che il *nuovo coefficiente angolare* sia reciproco e opposto, $-1/m$. Pertanto la retta cercata avrà equazione $\mathbf{y-y_0 = (-1/m)(x-x_0)}$.

Distanza di un punto da una retta data.

Esistono formule già pronte per risolvere questo problema. Può essere tuttavia utile conoscere il procedimento adatto alla soluzione, per esempio quando non si ricordano formule adatte al caso. Questa è anche occasione di applicare i concetti esposti sopra.
Sia dunque $P_0\ \mathbf{(x_0; y_0)}$ il punto in questione: si vuole la distanza dalla retta che ha equazione implicita $ax + by + c = 0$.
Se preferiamo le formule in forma esplicita, allora è meglio esplicitare l'equazione della retta rispetto alla y:
otteniamo $y = -(a/b)x - c/b$ in cui il coefficiente angolare è $m = -(a/b)$. Il coefficiente angolare della perpendicolare è allora b/a dovendo essere il reciproco e avere segno contrario.



Dovendo trovare la distanza tra H e P_0 sappiamo che il segmento P_0H deve essere valutato sulla perpendicolare per P_0 alla retta data (**ax+by+c=0**).
Applicando contemporaneamente la condizione di passaggio per il punto $P_0\ \mathbf{(x_0; y_0)}$ suddetto e la condizione di perpendicolarità alla retta nota, abbiamo: $\mathbf{y-y_0=(b/a)\ (x-x_0)}$. Per trovare le coordinate del punto H $\mathbf{(x_H; y_H)}$ che è l'intersezione delle due rette basta allora imporre il sistema alle due equazioni corrispondenti alle due rette medesime.

$$\begin{cases} \mathbf{y-y_0=(b/a)\ (x-x_0)} \\ \mathbf{ax+by+c=0} \end{cases}$$

Il sistema – una volta risolto – fornirà le soluzioni del punto $H(x_H; y_H)$. Basterà allora calcolare la distanza $d=P_0H$ con la formula pitagorica della distanza:

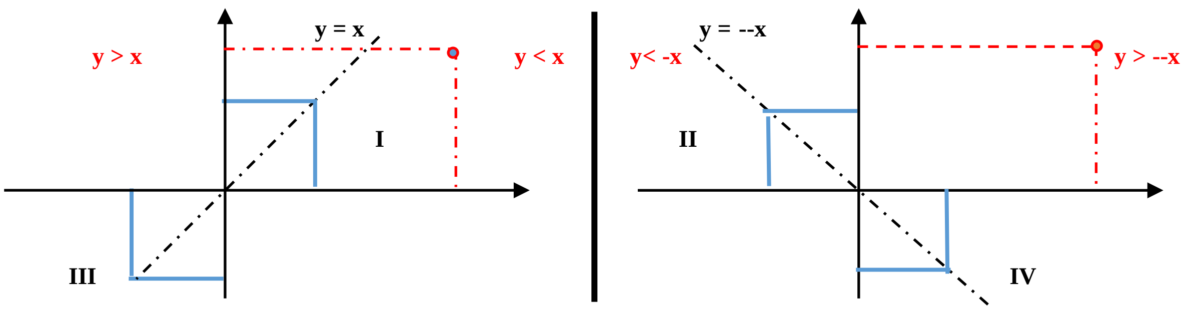
$$\mathbf{d} = \sqrt{(x_0 - x_H)^2 + (y_0 - y_H)^2}$$

Questo metodo è abbastanza comodo perché basato sul ragionamento. Esiste anche una formula che fornisce direttamente la distanza di un punto P_0 da una retta data in forma implicita (da questa, sostituendo i coefficienti corrispondenti, si ha pure la formula analoga valida per la retta data in forma esplicita). La formula stabilisce che bisogna sostituire le coordinate di P_0 nell'equazione della retta e usarne il modulo – cioè $|ax_0+by_0+c|$ - e infine dividere poi il risultato per $\sqrt{a^2+b^2}$.

$$\mathbf{d} = \frac{|\mathbf{ax_0+by_0+c}|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Bisettrici degli assi. Disuguaglianze.

Notiamo che il piano cartesiano ha quattro quadranti (I, II, III, IV). L bisettrici degli assi sono evidentemente due. Una si estende nel primo e nel terzo quadrante (figura a sinistra), l'altra nel secondo e nel quarto quadrante (figura a destra).



Consideriamo ora l'equazione y=x; è una frase algebrica che può essere letta "y è uguale ad x" oppure: "y e x sono uguali fra loro": ma dove e quando? Cartesio virtualmente risponde: "provate nel piano del sistema di riferimento cartesiano". Orbene nel piano cartesiano della figura di sinistra si nota subito che ogni punto della bisettrice del I e del III quadrante, corrisponde biunivocamente a una coppia ordinata di numeri reali x e y uguali fra loro. Questa uguaglianza è evidenziata dai segmenti in blu della figura a sinistra.

Il segmento orizzontale blu raffigura un corrispondente valore di x (p. es. x = 3). Il segmento blu verticale, raffigura il valore di y e (trattandosi di bisettrice che taglia in due parti uguali il primo quadrante) si vede bene che – trattandosi di bisettrice – deve avere la stessa lunghezza del segmento blu orizzontale: (dunque anche y = 3).

Si consideri ora un qualsiasi altro punto della retta y=x nel terzo quadrante (ancora nella figura a sinistra).

Qui, se x = -- 3 allora (data la reciproca uguaglianza voluta dall'equazione) deve essere ed è anche (come si vede) y = x = --3.

Nell'origine abbiamo naturalmente x = y = 0 e quindi anche nell'origine x e y sono uguali fra loro essendo entrambi nulli.

Dunque l'equazione y = x è rappresentata da tutta la bisettrice degli assi cartesiani passante per l'origine e che traversa I e III quadrante. Viceversa la bisettrice suddetta corrisponde all'equazione y=x.

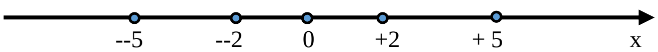
Possiamo quindi concludere che un'equazione può certo corrispondere ad una figura nel piano cartesiano e diventa così la sua "illustrazione".

Proviamo ora a sostituire il segno di uguale (=) con il segno di disuguale. Avremo due possibili diverse disuguaglianze.

Una sarà ***y > x*** e l'altra sarà ***y < x***.

Notiamo anche che in tutto il semipiano al di ***sotto*** della bisettrice (che corrisponde a y=x), risulta x > y (si legga: "x maggiore di y"), disequazione che equivale alla y < x (cioè "y minore di x").

In generale, si noti che se si scambiano i due membri di una disequazione, il verso di > cambia in < (e viceversa). Così se 5 > 2, allora 2 < 5. Se si cambiassero i segni ai due membri si avrebbe che da 5 > 2 si passerebbe a –5 < --2; dunque cambiando il segno dei due membri si cambia il verso della disuguaglianza come risulta dallo schema grafico seguente; anche questo è un sistema di riferimento cartesiano ma monodimensionale (una sola dimensione perché usiamo una sola retta).



La figura evidenza che le disuguaglianze fra numeri negativi possono apparire opposte a quelle fra numeri positivi, ma ciò si spiega subito. Se ci mancano solo due oggetti anziché cinque, è certamente meglio nel senso che ne abbiamo di più se ce ne mancano solo due anziché addirittura cinque. Di qui la necessità di mantenere la coerenza con il verso positivo stabilito dal verso positivo (freccia verso destra) ponendo -5 a sinistra di -2; per convenzione – stabilito dal verso positivo scelto con la freccia - è dunque sempre maggiore il numero che sta a destra di un altro. Come è giusto che sia +5 > +2 è anche giusto che sia --5 < --2 e quindi –5 è a sinistra di –2.

*(Si hanno **più** tazzine in un servizio da tè se ne mancano nessuna (zero), solo una o solo due... anziché cinque!).*

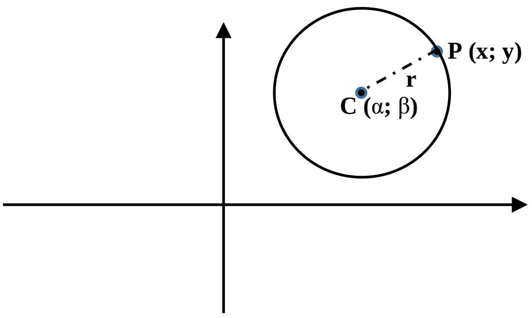
Notiamo ora che nel semipiano al disopra della bisettrice risulta $y > x$ come si può facilmente verificare tracciando le coordinate di un qualsiasi punto del semipiano suddetto.
Nella figura di destra si considera la bisettrice degli assi cartesiani che passa per l'origine e taglia a metà il secondo (II) e il quarto (IV) quadrante. Basta un momento di riflessione per accorgersi che le due coordinate hanno sempre segno opposto per ciascun punto di questa bisettrice che infatti è caratterizzata dall'equazione $y = -x$ da leggere così: "nei punti del piano cartesiano, le due coordinate x e y – presenti nell'equazione - sono uguali ma di segno opposto".
Questa relazione è evidenziata dai segmenti in blu nella figura di destra.
In un qualsiasi punto della bisettrice, un segmento orizzontale blu raffigura un corrispondente valore di x (p. es. $x = 3$). Il segmento blu verticale che parte dal medesimo punto, raffigura il valore di y che deve avere la stessa lunghezza del segmento blu orizzontale, ma deve rappresentare il segno contrario, in questo caso negativo: (dunque sarà $y = -3$). Pertanto l'ordinata y (negativa) è tracciata al di sotto dell'asse x.
Viceversa, se $x = -3$, allora $y = +3$.
Naturalmente se $x = 0$ anche $y = 0$.
L'equazione $y= -x$ permette naturalmente di considerare le due disequazioni: $y > -x$ e $y < -x$.
Rispetto a queste due disequazioni, l'equazione $y=x$ è come fosse il loro spartiacque nel senso che sta in una posizione di mezzo.
Queste tre relazioni possono essere poste in forma implicita e diventano $x + y > 0$, $x + y < 0$ e infine $x + y = 0$ le quali, ordinate come segue, mostrano la loro reciproca relazione:

$$x + y > 0$$
$$x + y = 0$$
$$x + y < 0$$

Notiamo che nel semipiano ***al disopra*** della bisettrice $y = -x$ risulta $y > -x$ come si può facilmente verificare tracciando le coordinate di un qualsiasi punto del semipiano suddetto come in figura. Nel semipiano ***al di sotto*** della bisettrice $y= -x$ si ha invece $y < -x$.

Equazione della circonferenza.

La possibilità di calcolare la distanza fra due punti A e B permette di ricavare l'equazione cartesiana della circonferenza considerando la "*legge della circonferenza*".
Tutti i punti della circonferenza "obbediscono" ovvero "verificano" una medesima legge che è per tutti l'equidistanza da un punto fisso detto centro. Questa è la legge geometrica del luogo "circonferenza".
Quando una qualsiasi figura può essere descritta o comunque ricavata, mediante una legge di tipo geometrico cui tutti i suoi punti obbediscono, allora si parla di un ***luogo geometrico di punti***. Quando è descritta con numeri allora ***la legge è analitica***.
La legge della circonferenza è allora semplicemente ***PC = r*** in cui P è un punto qualsiasi della circonferenza; C è un punto fisso detto centro della circonferenza; r è la misura del raggio.
Conveniamo che α e β siano le coordinate del punto fisso C(α; β).
La legge della circonferenza impone: $PC = r$
Ovvero $PC^2 = r^2$
Volendo applicare la formula della distanza al quadrato abbiamo: $PC^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$



Sviluppando l'espressione $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$

Abbiamo: $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = r^2$
$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 - r^2 = 0$ ordinando con il grado delle variabili x y si ha:
$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$

Ponendo **a** $= -2\alpha$
b $= -2\beta$
c $= \alpha^2 + \beta^2 - r^2$

e sostituendo nell'equazione, si ha:

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$ **Equazione della circonferenza.**

Vediamo così che anche l'equazione della circonferenza è caratterizzata da tre parametri a, b, c come l'equazione implicita della retta, ma è diversa perché entrambe le variabili compaiono ciascuna elevata al quadrato e con identico coefficiente unitario. Possiamo così concludere che **figure geometriche diverse corrispondono a equazioni di diversa forma**.

Alcuni significati geometrici particolari possibili derivati dai parametri nell'equazione della circonferenza.

Osserviamo che i parametri a, b, c devono avere un significato caratteristico per ciascuno di essi, già implicito nelle uguaglianze poste come p. es. $a = -2\alpha$

Per semplicità esaminiamoli uno per volta osservando cosa accade quando scompaiono, cioè quando uno o più siano nulli.

Cominciamo a fare sparire il parametro **c** uguagliandolo a zero.

Allora l'equazione appare del tipo: $x^2 + y^2 + ax + by = 0$

Osserviamo subito che questa equazione è certo soddisfatta per x=y=0: Ne segue che un punto della circonferenza è l'origine stessa (0; 0) e quindi la circonferenza passa per l'origine.

Supponiamo di prendere in considerazione l'asse delle x che - come ormai sappiamo - ha equazione y = 0 e imponiamo questa frase algebrica all'equazione della circonferenza particolare che stiamo considerando. Imporre la condizione significa porre a "sistema" le due equazioni giacché stiamo supponendo che - nel nostro caso - debbano valere entrambe. Dobbiamo allora usare la parentesi graffa che indica la contemporaneità delle due equazioni nel senso che le variabili x e y sono le stesse nelle due equazioni che vi figurano. Abbiamo supposto che c=0 e quindi il parametro c manca nella circonferenza. Pertanto:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Dovendo rispettare la condizione ***y=0*** poniamo allora il valore nullo di y pure nella prima equazione e otteniamo:

$$x^2 + 0^2 + ax + b0 = 0 \text{ vale a dire:}$$
$$x^2 + ax = 0$$

Questa equazione è risolta agevolmente ponendo in evidenza la x giacché si ha:

$$x\,(x + a) = 0$$

Questa frase algebrica afferma che il prodotto di x per (a + x) è nullo ma ciò può accadere soltanto quando uno dei due fattori è nullo, cioè o quando $\boldsymbol{x = 0}$ oppure quando x + a = 0 cioè quando $\boldsymbol{x = -a}$.

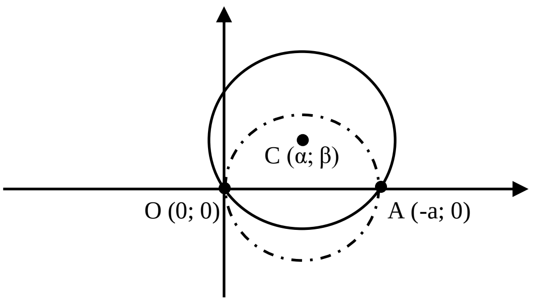
Tutto ciò accade nel caso supposto per la y cioè per y=0.

Nel piano cartesiano ciò significa che abbiamo alcuni possibili punti (x; y) che soddisfano il sistema esaminato: essi sono i punti con coordinate O (0; 0) cioè l'origine; inoltre un punto sull'asse delle x avente ascissa –a cioè il punto A (-a; 0). La circonferenza considerata in partenza era $x^2 + y^2 + ax + by = 0$.

Val la pena sottolineare che se p. es. a= -3 allora –a = +3. Vi sono infinite circonferenze possibili passanti per O ed A (si veda una in tratteggio). Ricordando per che **a** = - 2α e che b **=** – 2 β possiamo determinare le coordinate del centro e quindi decidere quale è la circonferenza del nostro caso. Infatti dalle relazioni ora dette si trae: α = -a/2 e β = -b/2. Queste relazioni permettono di trovare le coordinate del centro C e di decidere quale sia la circonferenza cercata, corrispondente all'equazione data della circonferenza.

Le relazioni dei parametri a, b, c, determinano completamente la circonferenza. Ripetiamo che esse sono:

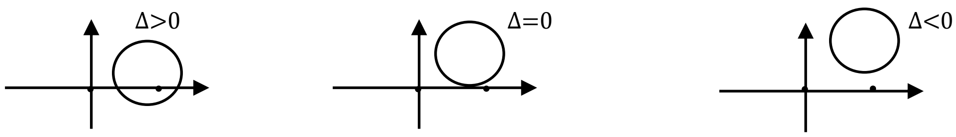
$$\mathbf{a} = -2\alpha$$
$$\mathbf{b} = -2\beta$$
$$c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$$



Supponiamo ora che a=0. Ciò significherebbe subito – in virtù delle relazioni suddette - che α=0 e quindi il centro C della circonferenza si troverebbe sull'asse y. Di conseguenza il punto A si deve trovare nell'origine O. L'equazione della circonferenza sarebbe diventata $x^2 + y^2 + by = 0$ che per x=0 è risolta da $y^2 + by = 0$ cioè y (y + b) = 0 quindi da y=0 oppure da y = -b. Quindi la circonferenza sarebbe in posizione simmetrica rispetto all'asse y, passerebbe per l'origine (0; 0) e per un punto (0; -b) sull'asse y. Il lettore provi a scrivere l'equazione e disegnare una possibile circonferenza con centro C (α; β) sulla bisettrice *y=x*.

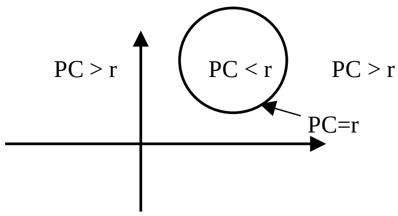
Intersezioni della circonferenza con l'asse x.

Sono date dal sistema formato dall'equazione della circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e dall'equazione dell'asse x che è y=0. Sfruttando la relazione y=0 sostituendola nell'equazione della circonferenza, si ottiene $x^2 + ax + c = 0$ che ammette le soluzioni: $X = [-a \mp \sqrt{\Delta}]/2$ ove, nel caso della circonferenza, $\Delta = a^2 - 4c$.



La circonferenza determina tre zone nel piano.

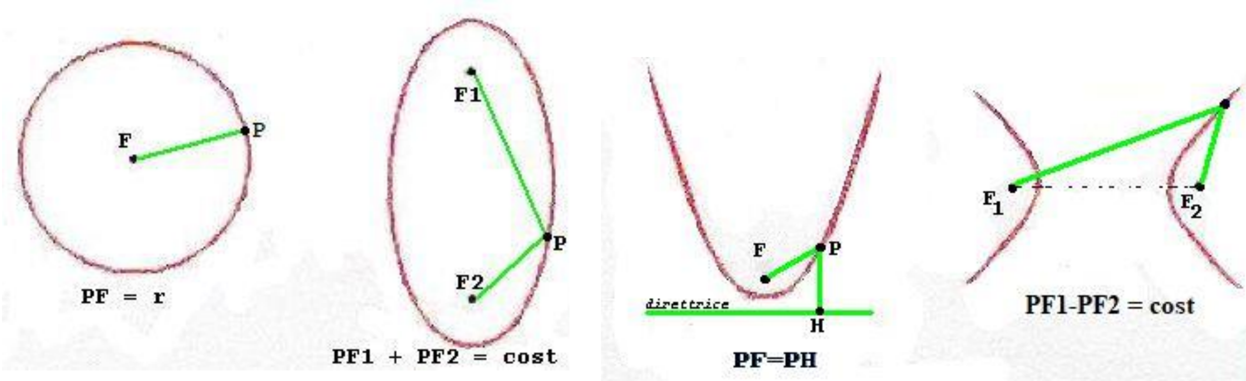
La legge geometrica cui obbediscono tutti i punti nel piano della circonferenza è che la loro distanza r da un punto fisso detto centro C sia per tutti costante, cioè PC=r. Di conseguenza nel piano si vengono a determinare tre zone diverse.
La zona in cui la distanza suddetta è maggiore di quella stabilita e cioè la zona "esterna" in cui risulta PC > r.
La zona in cui la distanza suddetta è esattamente uguale a quella stabilita e cioè la zona di "frontiera" in cui risulta PC = r.
La zona in cui la distanza suddetta è minore di quella stabilita e cioè la zona "interna" in cui risulta PC < r.



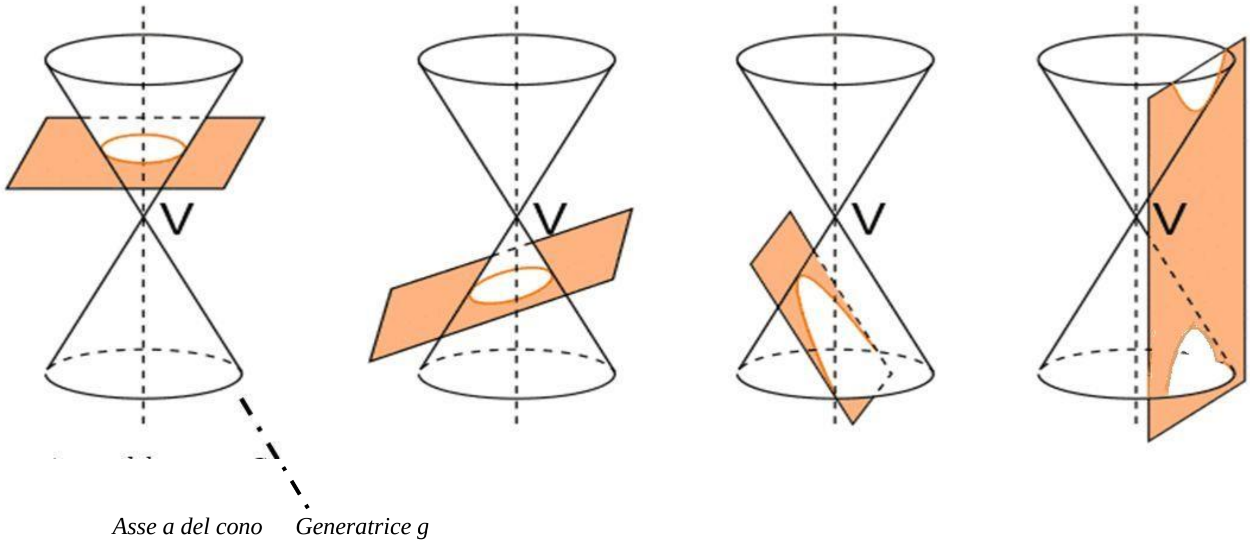
Luogo geometrico. Le Coniche di Apollonio.

Abbiamo detto che un luogo geometrico è un insieme di punti che obbediscono tutti ad una stessa legge.
Un esempio di luogo geometrico è la circonferenza in quanto tutti i suoi punti sono equidistanti da un punto fisso detto centro e sono tutti giacenti su un piano (essi formerebbero una sfera se fossero punti nello spazio tridimensionale).
La legge di un luogo geometrico può essere data come proprietà quantitativa (come nella circonferenza in cui la distanza di un punto dal centro è sempre uguale) oppure anche come forma nello spazio grazie a un metodo di costruzione come nelle curve *coniche ottenute dall'intersezione di un cono con un piano.*
Un antico matematico, Apollonio, studiò le "curve coniche" così chiamate perché ottenute dall'intersezione di un piano con un doppio cono infinito. Egli trovò che le curve così possibili erano quattro: ***circonferenza, ellisse, parabola, iperbole***.
Il cono di Apollonio è ottenuto ruotando una retta g, detta ***generatrice***, con un angolo costante intorno ad un'altra retta detta ***asse*** del cono. Si ottiene in questo modo un doppio cono infinito.
Le curve suddette sono chiamate "coniche": sono descritte da equazioni di secondo grado e costituiscono le traiettorie di tutti i corpi celesti. La Luna intorno alla Terra descrive una circonferenza, i pianeti ruotano secondo ellissi intorno al Sole, un grave lanciato sulla terra descrive una traiettoria parabolica e le comete descrivono iperboli.

Si tratta di curve di straordinaria importanza. Si distinguono quattro tipi di luoghi geometrici, definiti da leggi metriche specifiche cui obbediscono tutti i loro punti. Elenchiamo qui nomi e leggi metriche illustrate da figure corrispondenti.



- ***Circonferenza***. Luogo in un piano dei punti **P** equidistanti da un punto fisso **F** detto "centro".
- ***Ellisse***. Punti **P** di un piano la cui somma delle distanze **PF1+PF2** da due punti fissi **F1** e **F2** detti "fuochi" è costante.
- ***Parabola***, Luogo nel piano di punti **P** equidistanti da un punto fisso detto "fuoco" **F** e da una retta detta "direttrice" **PF=PH**.
- ***Iperbole***. Punti **P** di un piano la cui differenza **PF1-PF2** fra le distanze da due punti fissi **F1** e **F2** detti "fuochi" è costante.



Circonferenza
Piano perpendicolare all'asse del cono

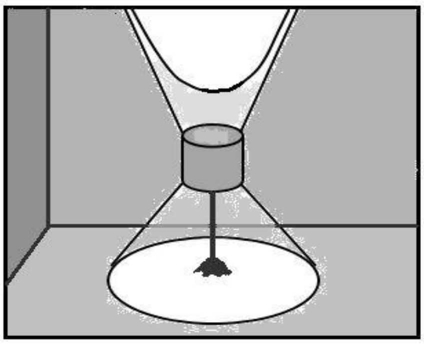
Ellisse
Piano obliquo

Parabola
Piano parallelo alla generatrice

Iperbole
Piano obliquo tra l'asse e la generatrice del cono.

Definizione delle curve coniche mediante metodi di costruzione con interazione di figure geometriche più semplici.
Nelle figure le curve coniche sono visibili come linee curve nei piani che tagliano il cono.

Le curve coniche si possono osservare facilmente con l'aiuto di una lampada elettrica con paralume, che abbia aperture circolari, proiettandone i conici fasci di luce sul muro di una parete (p. es. parabola o iperbole) o sul pavimento (p. es. circonferenza o ellisse). Parete e pavimento possono operare l'adatta sezione del doppio cono luminoso (che avrò diversa apertura angolare a seconda della posizione della lampadina nel paralume.



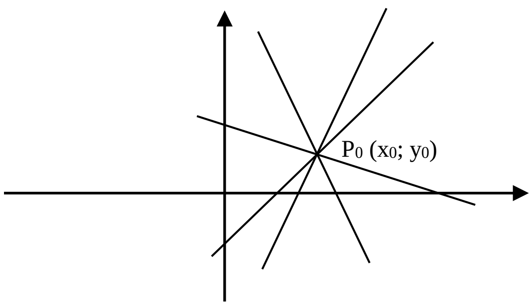
L'equazione di secondo grado e la sua visualizzazione resa possibile nel piano cartesiano. Fasci di rette.

L'equazione di II° grado $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ contiene una sola variabile x (l'incognita è considerata una variabile finché non se ne conosce il valore) mentre il piano cartesiano bidimensionale è stato inventato per due variabili.
Quindi l'equazione di secondo grado non è direttamente rappresentabile nel piano cartesiano. Tuttavia notiamo che essa appare essere un trinomio uguagliato a zero e che sarebbe rappresentabile se fosse invece uguagliato per es. ad y.
A questo punto si può pensare di uguagliare il trinomio alla y e di uguagliare *contemporaneamente* y a zero scrivendo y=0. La necessità della ***contemporaneità*** può essere resa dal simbolo di "***sistema***" (parentesi graffa) che obbliga alla contemporanea validità delle assunzioni che vi figurano comprese nell'ambito della parentesi graffa di sistema.
Dobbiamo scrivere che deve essere y=0 e inoltre che deve essere anche $ax^2 + bx + c = y$ ovvero $y = ax^2 + bx + c$. Quindi:

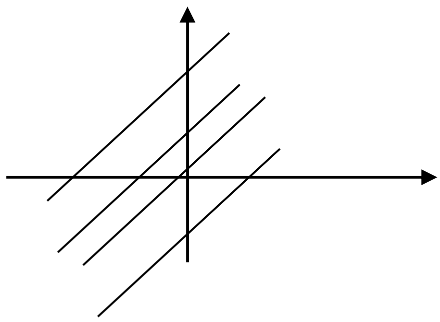
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

In questa forma, ***il sistema equivale all’equazione di secondo grado di partenza***.
L’equazione di secondo grado in x corrisponde ad una curva detta “parabola”. Si tratta di una “curva conica” che somiglia ad una U le cui due parti vanno verso l’infinito. L’asse della curva è parallelo all’asse y. La seconda equazione del sistema (y=0) è l’equazione dell’asse x in cui l’ordinata è sempre nulla. Il sistema è soddisfatto quando sono soddisfatte contemporaneamente entrambe le equazioni. Questo accade soltanto nei punti d’intersezione della parabola con l’asse delle x.
Risolvendo il sistema si ottengono le due soluzione x_1 e x_2 che dipendono dal Δ come già visto.
La parabola è descritta punto per punto dalla prima equazione. L’asse x è descritto dalla seconda equazione y=0.
Ricordiamo che le soluzioni sono intersezioni della parabola con l’asse x e queste soluzioni sono reali e distinte solo se il “delta” $\Delta>0$; sono reali ma coincidenti se $\Delta=0$ e infine sono complesse coniugate (quindi non reali) se $\Delta<0$.

Il parametro “a” corrisponde e determina l’apertura concava della parabola. Il parametro “b” determina la posizione dell’asse della parabola. Infine il parametro “c” determina intersezione della parabola con l’asse y.
A titolo di curiosità, la parte di primo grado compresa nell’equazione, insieme alla y, e cioè y = bx + c rappresenta la retta tangente alla parabola nel punto d’intersezione della parabola con l’asse delle y. Per dimostrarlo si scriva l’equazione della retta generica passante per il punto (0; c) che è il punto dell’asse y attraversato dalla parabola. Scritta in forma esplicita, questa retta generica ha equazione y = mx + c (in cui appunto, sostituendo x=0 si ottiene y=c). L’equazione si ottiene facilmente dalle coordinate di C scrivendo y – c = m(x - 0), cioè y – c = mx e infine y = mx + c.
L’equazione scritta si può considerare “*equazione del **fascio proprio di rette** passante per il punto C(0; c)*”. La definizione di fascio di rette è “insieme di rette che passano tutte per uno stesso punto”. Per definizione si dice poi che il fascio è ***proprio*** se il punto ha una posizione determinata nel piano cartesiano. Si dice che il fascio è ***improprio*** se il punto in questione è all’infinito nel qual caso il fascio è formato da rette tutte parallele fra loro (si suppone – o almeno si dice - che esse s’incontrano all’infinito).



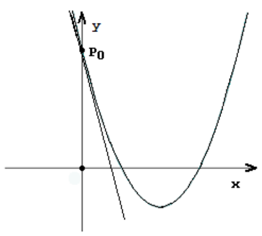
Fascio proprio: $y – y_0 = k(x – x_0)$.



Fascio improprio $y = mx + k$.

K è il parametro che, una volta scelto, individua la retta corrispondente al valore così deciso.

Tornando al problema della tangente, si scriva poi il sistema fra parabola e retta, entrambe passanti per C (0; c), punto denominato indifferentemente anche P_0, imponendo che il delta sia nullo cosicché le due soluzioni coincidano e si troverà infine che ciò accade solo per la retta del fascio che abbia equazione y = bx + c.
L’esercizio è lasciato al lettore. Si noterà allora che questa retta non è altro che la parte *non di secondo grado* dell’equazione della parabola stessa di partenza.



Parabola e tangente in $C = P_0$

Vediamo così che la geometria analitica è in grado di mostrarci molti e diversi significati dei simboli algebrici – persino in alternative ugualmente valide - che altrimenti potrebbero sembrarci reconditi, astrusi o misteriosi.

Indice