AREE E PERIMETRI IN DIDATTICA RAPIDA E VISUALE.

di

Salvatore Incarbone

----------0----------

Introduzione al metodo dinamico della didattica rapida.

Questo scritto tende a evitare il nozionismo spesso presente in didattica matematica proponendo un metodo alternativo. I successi ottenuti in molti anni di insegnamento nelle più varie materie, *artistiche* (musica, pittura, scultura), *scientifiche* (matematica, fisica), *tecniche* (robotica), *umanistiche* (psicologia, didattica), *letterarie* (tema in bianco, poesia) e persino *sportive* (nuoto), provano che ***movimentare*** i concetti, le figure, le idee, partendo dalla loro origine, favorisce grandemente la ***comprensione*** e l'***apprendimento*** che risulta più rapido e sicuro. L'apprendimento è una conseguenza della comprensione, non viceversa. ***Si ricorda meglio ciò che si comprende*** (piuttosto che quello che ci si sforza di memorizzare).
<u>La regola è un punto d'arrivo</u>, *non* un enunciato di partenza. Conviene ***dire come e perché*** ci si arriva.
Pertanto anche qui ci si vale di una rappresentazione più ***dinamica*** (che statica) in modo da cogliere la funzione dei vari elementi (idee, concetti), essenziali alla movimentazione interpretativa di figure dinamizzate.

Tenuto conto che, insegnando, non sempre sono facilmente disponibili i mezzi pratici necessari alla movimentazione e all'animazione figurativa, si è preferito rappresentare in una stessa singola immagine due o più stati salienti, significativi e tangibili di una ***dinamizzazione***.

Così ad esempio una stessa figura può rappresentare un trapezio o il triangolo equivalente; un parallelogramma può avere un lato obliquo movimentato per porre in risalto la costanza del perimetro oppure la costanza dell'area a seconda della dinamizzazione illustrata esaltandone la dipendenza dalla relativa configurazione.

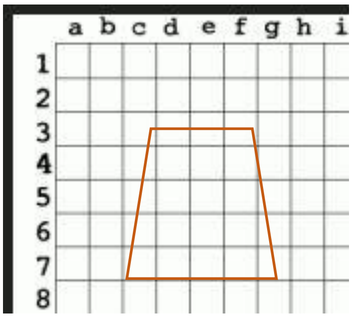
Aree e perimetri sono ricavati con naturalezza secondo i criteri di una didattica rapida che **<u>non</u>** *pone l'esigenza di formule elencate e imparate a memoria* ma espone ragionamenti semplici riferiti a casi della vita, osservabili e comunque visibili. Sono questi ***casi concreti*** che permetteranno all'allievo di cogliere e scegliere una maniera preferita per ricostruire un ***ragionamento condensato in una formula***. Formula che potrebbe essere stata dimenticata oppure non memorizzata in maniera forzata e sicura. Sarà tuttavia **<u>ricavabile</u>** se sarà stata **<u>compresa</u>**.

Aree e perimetri cessano così di presentarsi come semplici formule da ricordare bensì sono ***argomentazioni*** spiegate e giustificate dal modo in cui probabilmente nacquero. Sono semplicemente ***non enunciate***.

L'articolo è utile non solo agli allievi, ma anche come raccolta di ***esempi di didattica***. Confidiamo quindi che possa essere utile per gli insegnanti che vi troveranno spunti comodi e divertenti, quasi amabili storielle e tuttavia semplicemente utili. Lo splendore della loro naturalezza avvicinerà gli insegnanti agli allievi i quali a loro volta li gratificheranno con un migliore rendimento e simpatia per una materia spesso considerata difficile e ostica a causa di un'antica difficoltà più di comunicazione che di un'intrinseca caratteristica.

È certo difficile comunicare ciò che non è comune (come i concetti matematici). Pertanto la didattica della matematica deve rivolgersi a ciò che è comune, visibile o almeno immaginabile o riconducibile per essere più facilmente comunicabile (P. es. la quarta dimensione è a volte ricondotta a esempi tratti dalla terza). Spianata la via mediante una comunicazione piana, ragionevole e soprattutto accattivante, divertente. legata ai casi della vita quotidiana, spiegata col nostro metodo dinamico che tiene in gran conto la genesi, l'origine, la visibilità di ogni argomento, di ogni scoperta, apprendimento e insegnamento saranno grandemente facilitati.

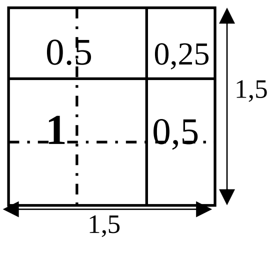
La misura in geometria. La misura di aree e perimetri è una parte importante della geometria. La parola stessa, geometria, significa "misura della terra" (Geo = terra, metria = misura). Si sa che gli egizi già nell'antichità avevano il problema di ritrovare i confini dei terreni misurando aree e distanze dopo le piene del fiume Nilo che con il limo li cancellava. Inoltre l'idea di una misurazione è alla base della scienza moderna.



La maniera più semplice di misurare le aree di una superficie di forma qualsiasi è di suddividerla con una quadrettatura e contare il numero dei quadratini che vi si trovano all'interno. In figura, un esempio di quadrettatura con due riferimenti diversi, uno letterale ed uno numerico per avere la possibilità di distinguerli uno dall'altro. Una proprietà di terreno trapezoidale poteva facilmente essere ricostruita grazie ai riferimenti realizzati con opportuni paletti. In realtà entrambi i riferimenti possono essere numerici (hanno il vantaggio di non avere limiti alla numerazione) distinguendoli con due semplici lettere, x e y, ciascuno riservata ad un "asse" (riferimento) ben determinato.
Grazie ai due riferimenti si poteva ricavare sia la forma che la misura del terreno.

Quadrato.

Si intuisce che più una forma è semplice e più è facile contare i quadratini della quadrettatura.
Per esempio, se un quadrato ha lato 3, anche la sua altezza ha misura 3.
Supponiamo di suddividerlo in quadratini di lato 1. Sulla base ve ne sono 3 su una stessa riga, ma vi sono tre righe una sopra l'altra e pertanto, moltiplicando per le tre righe, in totale abbiamo nove quadratini 9 = 3x3.
Tuttavia persino per un quadrato o per un rettangolo si possono avere delle difficoltà nel misurare l'area se i loro lati corrispondono a numeri non interi. Supponiamo di avere un quadrato di lato 1,5. Basta dare un'occhiata allo schema per accorgersi che esso ha nove quadratini di lato 0,5. I numeri all'interno del quadrato indicano aree (non lunghezze). I numeri all'esterno indicano lunghezze.



Il quadrato di lato 1,5 è suddiviso in nove quadratini di lato 0,5 = 1/2. L'area di ciascun quadratino è 05 × 05= 0,25 (ovvero ½ per ½ = ¼ = 0,25). Guardando la figura si vede chiaramente che il quadratino di area 0,25 è un quarto (¼=0,25) di quello di area 1.
L'area totale, formata dai nove quadratini, è 9x0,25 = 2,25 (ovvero 1+0,5+0,5+0,25=2,25).
In alternativa, moltiplicando la base per l'altezza, abbiamo 1,5 x 1,5 = 2,25. In sostanza, si contano i quadratini che giacciono su una riga, poi si contano le righe che si succedono sulla verticale e quindi si moltiplica il numero dei quadratini (di una riga) per il numero delle righe. In generale, si trova così che l'area del quadrato o del rettangolo è data dal prodotto della base per l'altezza. Nel caso del quadrato base e altezza sono uguali al lato "*l*" e allora il prodotto di base per altezza diventa semplicemente lato per lato ($l \times l = l^2$):

area del quadrato = l^2
in cui il 2 indica che il lato è moltiplicato per sé stesso due volte, facendo cioè l x l

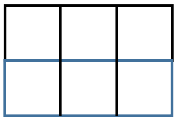
Nel caso del quadrato, si può dire che l’area è data dal “lato x lato” o anche “lato alla seconda”, “lato al quadrato” o magari “quadrato del lato”.

Essendo i lati del quadrato uguali fra loro, il perimetro è dato da quattro volte il lato:

Perimetro del quadrato, indicato con la lettera p, si trova facendo p = 4 x l = 4l
(in “4l”, è omesso il segno di “per” che era indicato con “x”)

Rettangolo.

Il rettangolo è un quadrilatero (cioè una figura piana chiusa da quattro segmenti). I segmenti si susseguono ad angoli retti formando una spezzata chiusa; essi sono inoltre alternativamente uguali e paralleli a due a due.
Supponiamo di voler contare il numero di quadratini di un rettangolo di lati 3 e 2.



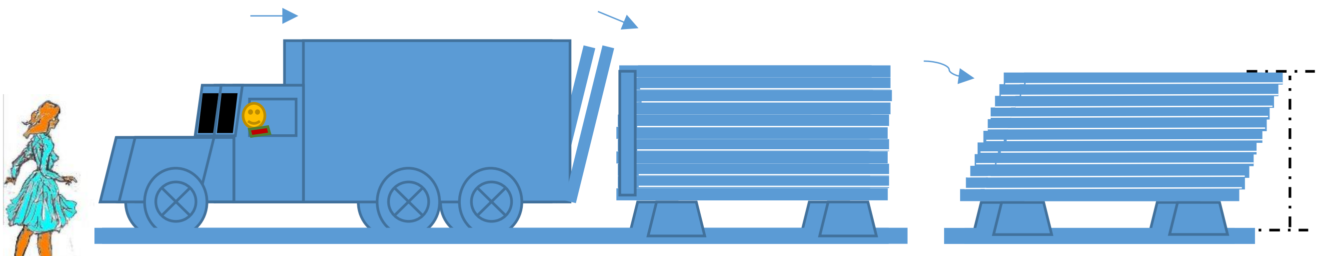
Guardando la figura, si vede che sulla base ci sono tre quadratini; ma in altezza ve ne sono due e quindi abbiamo due righe orizzontali. Ciascuna è formata da tre quadratini. Complessivamente l’area (che per convenzione è valutata mediante il numero dei quadratini) è allora formata da 3 x 2 = 6 quadratini.
In generale, in un rettangolo, l’area è data dalla misura della base b moltiplicata per la misura dell’altezza h e si scrive:

area del rettangolo = b x h = bh

Il perimetro è dato dalla somma di tutti i lati che sono uguali a due a due e quindi si ha:
p = 2b + 2h = 2(b + h)

Parallelogramma.

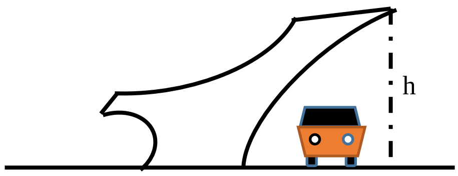
Immaginiamo di vedere tanti listelli orizzontali di legno posati uno sull’altro che formano una catasta verticale. Nell’insieme formano una figura rettangolare.
Supponiamo ora che un autocarro debba caricarli e durante la manovra di retromarcia - per una distrazione del guidatore - lo sportello del cassone posteriore si sgancia e va ad urtare la catasta deformandola.



PRIMA: *Distrazione con manovra di caricamento errata* **DOPO**: *catasta deformata*

I listelli scivoleranno l’uno sull’altro formando casualmente la figura di un “parallelogramma”. È evidente che sebbene la forma sia cambiata, non è cambiata l’altezza della catasta giacché il listello più alto, scivolando, si mantiene ancora alla stessa altezza di prima. Nel parallelogramma infatti abbiamo una base, per esempio orizzontale, poi due lati obliqui, e infine una sommità orizzontale che - anche se si è spostata scivolando - è rimasta comunque uguale e parallela alla base. L’altezza a cui si trova il listello più alto è sempre alla stessa sommità di prima; l’altezza va valutata secondo una linea “verticale”, (mai obliqua).
Immaginiamo ora che la fiancata visibile della catasta dovesse essere rifinita da una vernice protettiva. Il numero dei barattoli di vernice che occorrono è naturalmente in proporzione all’area a vista.
Dopo l’incidente la catasta ha cambiato forma ma la superficie da verniciare non è affatto modificata poiché i listelli sono sempre gli stessi anche se si sono spostati scivolando orizzontalmente uno sull’altro; pertanto la verniciatura potrà essere eseguita con lo stesso numero di barattoli, cioè l’area da verniciare non è affatto cambiata.
Di conseguenza l’area del parallelogramma si trova come per il rettangolo facendo base x altezza, ricordando che l’altezza è quella in verticale (e mai il lato obliquo).

Ad esempio una stazione ferroviaria o una stazione di servizio per auto possono avere una tettoia che si sviluppa con un'architettura bizzarra e con linee oblique o curve ma l'altezza utile della tettoia dev'essere contata dal suo apice - cioè dal punto più alto. In ogni caso conta il punto più alto al di sopra delle persone – e l'altezza h va fino a terra secondo la linea verticale (mai obliqua) che è quella utile per ripararsi dalla pioggia o dal sole a picco a mezzogiorno.



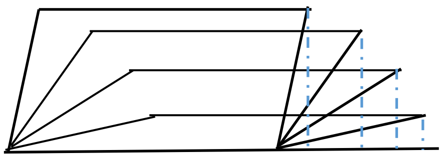
Indichiamo la base con b, con q un lato obliquo, con h l'altezza. Allora abbiamo

area del parallelogramma = b x h = bh

Passando al perimetro del parallelogramma, questo è dato dalla somma delle lunghezze dei suoi lati. Faremo quindi la somma delle due "basi" (una in basso e una in alto) sommata alla somma dei due lati obliqui (che invece ora contano).

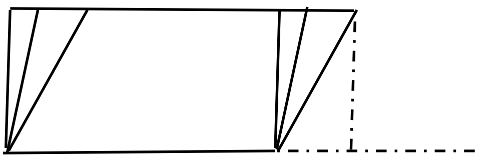
perimetro del parallelogramma = 2b + 2q = 2 (b + q)

Se in un parallelogramma si conoscono la base e il lato obliquo - ma non l'altezza - l'area non è calcolabile poiché a parità di lato obliquo, l'area dipende dall'altezza (che varia con l'angolazione del lato obliquo - rispetto alla base).



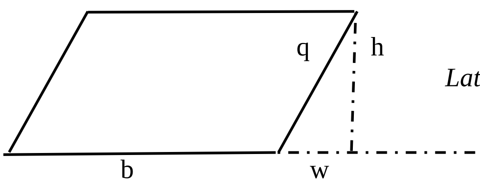
Base costante. Lato obliquo rotante e altezza variabili
Movimentazione a perimetro costante (e area variabile)

*Il lato obliquo della figura ruota ed è sempre uguale nei vari parallelogrammi, ma le altezze sono diverse pur a parità di lato obliquo. Di conseguenza le **aree sono tutte diverse** e diminuiscono man mano che il lato obliquo s'abbassa, ma si può notare che il **perimetro resta costante**, cioè sempre uguale.*



Altezza costante. Lato obliquo variabile
Movimentazione ad area costante (e perimetro variabile)

*Se invece, l'altezza e la base rimangono uguali, allora **l'area rimane uguale** ma questa volta **cambia il perimetro poiché il lato obliquo cambia (di lunghezza) inclinandosi**.*



Lato obliquo q. altezza h e ombra w sono fra loro legati con il teorema di Pitagora

Se si conosce la base b, il lato obliquo q e l'ombra w del lato obliquo sulla linea di base, allora si può ricavare l'altezza h (con il teorema di Pitagora) e calcolare l'area. Il perimetro è dato dalla formula sopra scritta. L'ombra w si può dire anche "proiezione del lato obliquo sulla linea della base".

Da notare che se oltre alla base b, si conoscono il lato obliquo q e la sua "ombra" w sull'orizzontale, allora si può calcolare l'altezza con il teorema di Pitagora e calcolare l'area. Questo teorema si applica ***solo*** ai triangoli rettangoli (che hanno cioè un angolo retto, vale a dire 90°). Nel nostro caso si forma infatti un ***triangolo rettangolo*** di lati q, h, w.
Basta conoscere due di questi tre elementi, per calcolare il terzo col suddetto teorema.
Infatti se si vuole il perimetro ma non è dato q, questo lo si può ricavare da h e w.

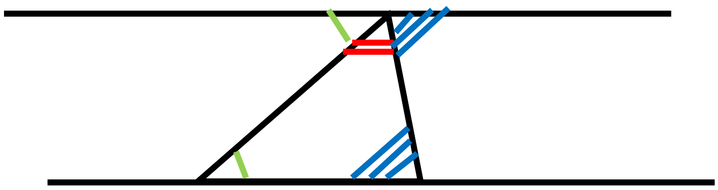
Triangolo.

In un triangolo, l'area è calcolata moltiplicando la base per l'altezza e dividendo per due. Si può infatti considerare il triangolo come metà di un rettangolo o di un parallelogramma (di eguali base e altezza). Lo si vede dalla figura.

area del triangolo = (b x h) / 2 = bh/2

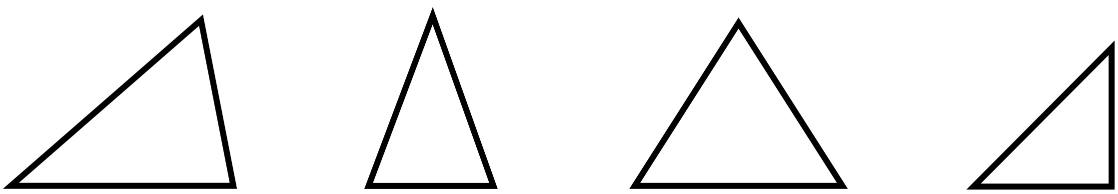
Il perimetro del triangolo è dato dalla somma dei tre lati a, b e c, cioè:
$p = a + b + c$

*Il triangolo si dice **scaleno** quando nessuno dei tre lati è uguale a un altro.*
*Si dice propriamente **isoscele** quando solo due lati sono uguali fra loro.*
*Si dice **equilatero** quando i tre lati sono tutti uguali fra loro (p = 3l).*
*Si dice **triangolo rettangolo** se è retto uno degli angoli. (In un triangolo qualsiasi ci può essere al massimo solo un angolo di 90° o più. In ogni caso, la somma dei tre angoli è sempre 180° come illustrato in figura)*



Per Talete, sono uguali gli angoli alterni interni che si formano tra due parallele tagliate da una trasversale. Dalla figura si può così vedere che è 180° (angolo piatto) la somma degli angoli interni di un triangolo qualsiasi (180° = verde + rosso + blu).

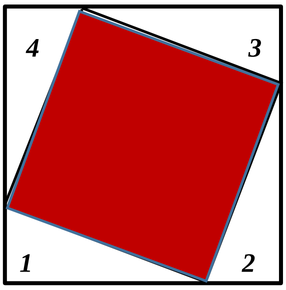
Più avanti vedremo che fra i tre lati del solo triangolo rettangolo vale il "Teorema di Pitagora".

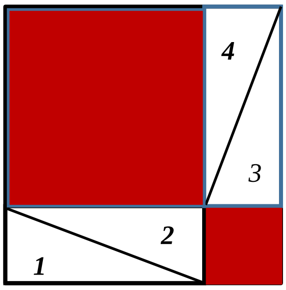


Scaleno Isoscele Equilatero Rettangolo

Teorema di Pitagora (*)

Data la sua importanza è bene ricordare che il teorema di Pitagora a cui ci riferiamo si applica ai tre lati dei "triangoli rettangoli" che sono tutti quelli che hanno al massimo un solo angolo retto. Il lato più lungo del triangolo rettangolo è detto "ipotenusa" mentre gli altri due lati più piccoli sono detti "cateti".





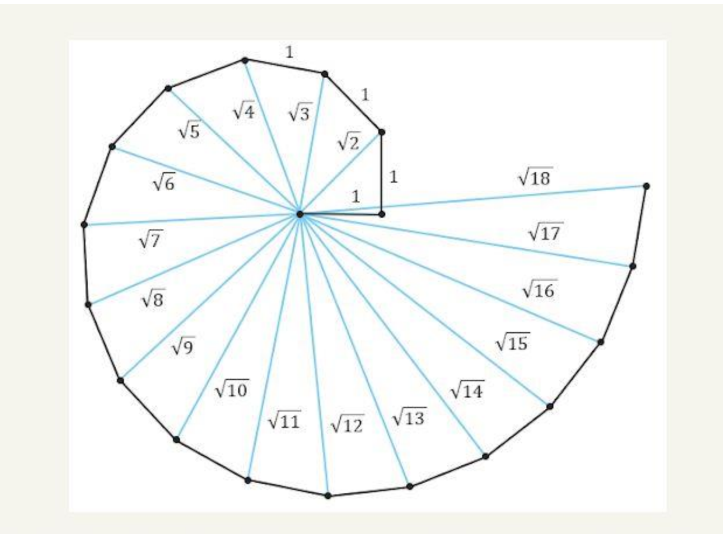
Guardando la figura, si vede subito che **l'area in rosso** (non numerata) è **la stessa nei due casi**. Infatti il quadrato grande contenitore è identico per costruzione e così pure sono sempre gli stessi i triangoli rettangoli (numerati). Essi sono tutti sempre uguali fra loro anche se sono disposti in modo diverso.
Pertanto **l'area del quadrato** in rosso nella prima figura è uguale alla **somma delle aree dei due quadrati** in rosso nella seconda figura. (La movimentazione è ottenuta immaginando di passare da una figura all'altra spostando i triangoli 1, 2, 3, 4).
L'area in rosso nella prima figura è il quadrato dell'ipotenusa "i".
L'area in rosso complessiva nella seconda figura è la somma dei quadrati dei cateti che indichiamo con "c_1", "c_2".
Pertanto il teorema afferma che il quadrato dell'ipotenusa equivale alla somma dei quadrati dei due cateti, cioè:

$$i^2 = c_1^2 + c_2^2$$

relazione che calcola l'ipotenusa ***i*** *conoscendo i cateti. Infatti estraendo la radice quadrata di ambo i membri si ha: i = radice quadrata del secondo membro= radice quadrata della somma (+) dei quadrati dei cateti* $c_1^2 + c_2^2$.
La medesima relazione permette di calcolare anche uno dei cateti conoscendo sia l'ipotenusa e sia l'altro cateto:

$$c_x = \sqrt{i^2 - c^2}$$

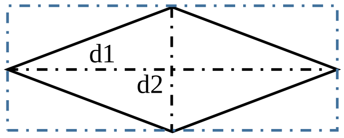
La spirale delle radici *scoperta da Teodoro da Cirene*.
Al centro della spirale che si vuole costruire si ponga l'estremo di un segmento, di lunghezza considerata convenzionalmente unitaria e in posizione orizzontale. A partire dalla sua estremità destra, si ponga un altro segmento unitario con un angolo di 90° rispetto al primo. Si ottiene una spezzata aperta; congiungendo fra loro i due estremi si ottiene una linea diagonale che per il teorema di Pitagora ha per misura la radice di $1^2 + 1^2 =$ = radice di (1 + 1) = radice di 2.
Continuando a disporre uno dopo l'altro dei segmenti unitari, a 90° rispetto alle diagonali che man mano si formano, otterremo una "spirale delle radici" dei numeri interi, come in figura.
La spirale a fianco rappresenta le radici dei numeri interi da 1 a 18 ma può proseguire a piacere.



Questa spirale l'avevo riscoperta io alla fine del liceo, quasi per gioco, senza nulla sapere di Teodoro da Cirene (dell'antica scuola pitagorica). Cirene è in Cirenaica (Libia).

Rombo.

Il rombo è un parallelogramma con i quattro lati tutti uguali fra loro. Sono importanti due diagonali d_1 e d_2. Queste diagonali sono uguali e parallele ai lati del rettangolo contenitore del rombo come in figura, cioè tale da incontrare i vertici del rombo nei propri punti di mezzo (sono punti medi dei lati del rettangolo contenitore, in tratteggio).



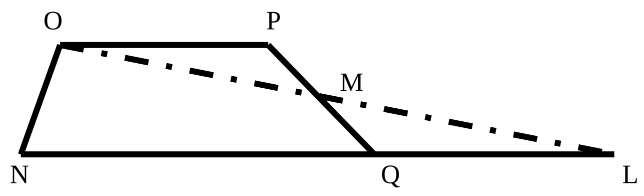
Dalla figura si vede che: l'area del rombo può essere data dal prodotto delle diagonali diviso per 2. Infatti l'area del rombo è divisibile in quattro parti uguali (delimitate dai tratteggi) che sono rispettivamente uguali ad altrettante parti (in bianco) del rettangolo contenitore. Da notare che le diagonali sono fra loro perpendicolari. Esse delimitano quattro triangoli tutti uguali fra loro. La diagonale maggiore è la più lunga, l'altra è la diagonale minore. Se uguali, il rombo è un quadrato.
In alternativa, il rombo si può considerare come composto da due triangoli isosceli, uno capovolto rispetto all'altro. L'area di uno di questi triangoli isosceli è data dalla base d_1 per l'altezza $d_2/2$, tutto diviso per 2, cioè $(d_1)(d_2 / 2) /2 = (d_1d_2) / 4$. Ma i triangoli sono due e quindi l'area totale è il doppio, cioè 2 per $(d_1d_2) / 4 = (d_1d_2) / 2$.
Naturalmente il perimetro è dato da quattro volte un lato del rombo. Si vede bene che qualunque sia il procedimento ovvero il modo di considerare la figura, il risultato è sempre lo stesso e il calcolo si fa sempre con la stessa formula finale: comunque si giunge allo stesso risultato finale.

Area del rombo = $(d_1 d_2) / 2$
Perimetro del rombo = $4l$

<u>Nota</u>: *naturalmente il rombo è anche un particolare parallelogramma poiché i lati sono uguali e paralleli a due a due. Di conseguenza, può essere trattato anche come tale: assumendo un lato come base, occorre conoscere o ricavare l'altezza rispetto alla base scelta. L'area del rombo si può calcolare in quattro modi diversi. Ulteriori notizie più avanzate sul rombo (p. es. con la trigonometria, che per ora qui non usiamo) si trovano in "Rombo Wikipedia", internet.*

Trapezio.

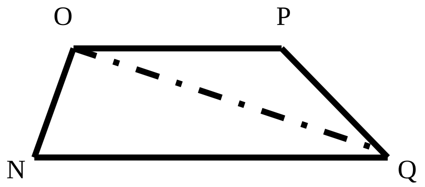
Il trapezio è un **<u>quadrilatero con solo due lati paralleli</u>**. Questi due lati paralleli sono chiamati base maggiore B e base minore b (pure nel caso in cui siano eventualmente uguali fra loro, ma allora si avrebbe un parallelogramma).
L'altezza è simboleggiata con h. L'area è data dalla somma delle basi moltiplicata per l'altezza, tutto diviso per due: vediamone il perché in due modi diversi. Potremo scegliere quello che ci piace di più: di solito è quello che **<u>si ricorda meglio</u>** e quindi è più utile per ricavare la formula al momento in caso di dimenticanza.



Nella prima figura consideriamo il punto medio M che divide in due parti uguali il lato obliquo PQ. Per questo punto facciamo passare la retta che incontra il vertice O della base minore e interseca in L il prolungamento della base maggiore NQ. Osserviamo che i due triangoli MPO e MQL sono uguali giacché **<u>sono uguali i segmenti MP e MQ</u>** per costruzione (M punto medio, divide PQ in due parti uguali fra loro). Inoltre la retta OL fa da trasversale delle basi che sono parallele, generando angoli uguali rispetto a queste:

<u>angolo POM = angolo QLM</u>

Inoltre gli **<u>angoli opposti al vertice in M, sono uguali</u>** fra loro. Per questi motivi i due triangoli MPO e MQL sono uguali.
Di conseguenza il triangolo ONL equivale al trapezio ONQP. L'area di ONL è uguale alla base NL (che è la somma delle basi del trapezio) per l'altezza del trapezio, diviso 2, cioè: *$(B + b)h/2$*



Nella seconda figura la diagonale OQ taglia il trapezio in due triangoli, uno con base maggiore NQ e l'altro con base minore OP. Pertanto l'area del trapezio è data dalla somma delle aree dei due triangoli e quindi:

area del trapezio = Bh/2 + bh/2 = (B + b)h/2
perimetro del trapezio = somma dei quattro lati

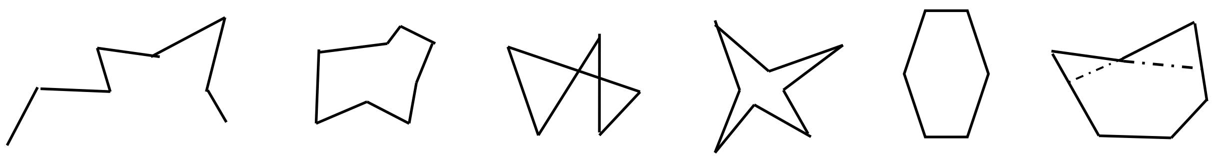
Le due figure e relative dimostrazioni delle formule sono qui fornite per comodità di ***scelta*** di chi memorizza.

Poligoni regolari.

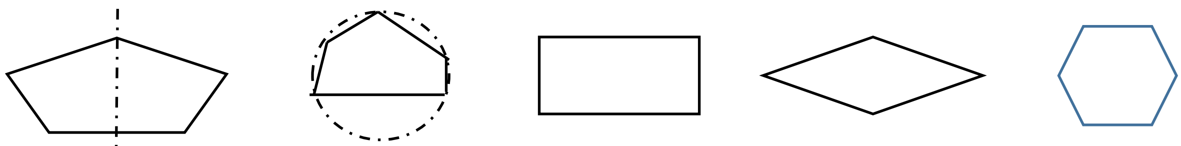
In greco poli significa "molti" e gono significa "angolo". Dunque un poligono è una figura con molti angoli.
In pratica però s'intende qualcosa in più di questo - più di una semplice spezzata che ha molti angoli - giacché di solito ci si riferisce ad una figura piana chiusa formata da una spezzata tale che l'**ultimo** suo punto coincida con il **primo**.
Si genera così una figura chiusa, magari intrecciata, ma comunque tale che - percorrendola tutta - si può incontrare di nuovo il punto di partenza.
Il poligono può essere intrecciato o magari stellato e l'angolo fra due segmenti consecutivi può essere qualsiasi.
Il **poligono** è dunque inteso come una figura piana interna a una spezzata chiusa i cui segmenti sono "***lati***" del poligono. I punti comuni a due lati sono detti "***vertici***"
Se i lati del poligono non s'intrecciano, il poligono è *semplice* altrimenti è *complesso* ovverosia *intrecciato*.

Lati uguali - Angoli diversi | Lati uguali - Angoli uguali | Lati diversi - Angoli uguali | Lati uguali - Angoli diversi

In generale non c'è relazione fra tipo di lati e tipo di angoli



Spezzata aperta | "Poligono" chiuso | Intrecciato | Stellato | Convesso | Concavo



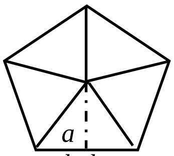
Simmetrico | Ciclico | Equiangolo | Equilatero | Regolare

*Un **poligono** è **regolare** non solo se è **convesso** (cioè ogni angolo interno è non maggiore di un angolo piatto), ma se è anche **equilatero** (cioè ha tutti i lati uguali), e pure **equiangolo** (ha tutti gli angoli uguali); è **concavo** se prolungando (tratteggiando) **almeno un lato, questo taglia in due il poligono**. Un poligono può risultare **simmetrico** rispetto a una o più rette dette "assi di simmetria" che lo tagliano in **parti specularmente uguali**.*
Ciclico** se inscritto in una **circonferenza.

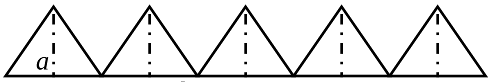
I **poligoni regolari** hanno almeno tre lati (triangolo equilatero). Naturalmente hanno lati e angoli tutti uguali. I più *comuni* (secondo il numero dei lati) sono: *triangolo equilatero, quadrato, pentagono, esagono, ettagono, ottagono, ennagono, decagono, endecagono, dodecagono (che ha 12 lati). Gli angoli sono tanti quanti i lati.*
Il cerchio si può considerare come un poligono regolare formato da infiniti lati di lunghezza infinitesima cioè infinitamente piccola ovvero "sufficientemente piccola a piacere in relazione agli scopi prefissi".
Consideriamo un poligono regolare qualunque, per esempio un pentagono.

Pentagono.

Immaginiamo di avere una torta pentagonale. Tagliamola in cinque porzioni uguali. Il contorno della torta sia chiuso con un nastro adesivo commestibile. Allora le porzioni possono essere disposto insieme e vicine fra loro lungo un listello rettilineo come in figura. Abbiamo così cinque triangoli tutti con la base su uno stesso segmento (il nastro). Conoscendo la lunghezza di un lato, il perimetro è dato dalla lunghezza del lato, moltiplicata per il numero dei lati.
L'area si ricava moltiplicando la base di uno di questi triangoli per la sua altezza che si chiama "*Apotema" (in tratteggio nella figura).* Il termine deriva da un verbo greco che significa "mettere giù" con riferimento al segmento "abbassato" dal centro del poligono perpendicolarmente ad un suo lato.



l=lato



5l= perimetro

Perimetro pentagono; p = 5l.   Area pentagono: (lato x apotema / 2)x5 = (5la)/2=(pa/2)=semiperimetro x apotema

Per ricavare l'area occorre conoscere l'altezza di ciascun triangolo. Questa altezza è ovviamente l'apotema.
L'area è data dalla somma delle aree dei triangoli (isosceli) che formano il poligono regolare.
Se l = lato, a = apotema, n = numero dei lati (ovverosia numero dei triangoli), per un *qualsiasi* poligono regolare di n lati:

Perimetro del poligono = nl

Area del poligono = (al)(n)/2 = a(nl)/2 = ap/2 ("apotema per semiperimetro")

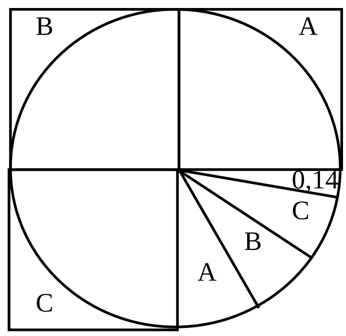
Circonferenza.

La circonferenza racchiude il cerchio al suo interno e si può disegnare col compasso. Premettiamo una definizione di ***luogo geometrico***. Si dice luogo geometrico l'insieme di tutti i punti che soddisfano una medesima legge geometrica. Un esempio è la circonferenza. Infatti:
"La circonferenza è il luogo di tutti i punti equidistanti da un punto fisso detto centro". Il segmento di massima lunghezza – tutto contenuto nel cerchio – passa per il centro, collega due punti opposti sulla circonferenza e si chiama "***diametro***".
Il diametro è il doppio del "raggio r". Il raggio quindi collega il centro della circonferenza con un qualsiasi punto di questa.
La lunghezza della circonferenza può essere calcolata in rapporto al diametro. Se prepariamo uno spago di lunghezza uguale a quella del diametro e con questo spago seguiamo la linea della circonferenza, vedremo che essa è lunga circa 3,14 volte la lunghezza dello spago.
Il numero 3,14 è approssimato ma fu calcolato da Archimede con un'approssimazione eccezionalmente buona per la sua epoca. La matematica moderna è riuscita a calcolare questo numero con un numero di cifre dopo la virgola praticamente a volontà, ma si sa comunque che si tratta di un numero con infinite cifre diverse: si è convenuto quindi di indicarlo con la lettera *π* (è la "p" dell'alfabeto greco). Questa scelta letterale è praticamente dovuta al matematico svizzero Eulero.
Il perimetro del cerchio, comunemente detto "circonferenza" è quindi dato dalla formula (in cui r=raggio, 2r = diametro):

circonferenza = (2r)π = 2 π r

Per avere un'idea di come si trova l'area del cerchio, possiamo farlo in almeno due modi diversi.

In un primo modo, consideriamo il raggio; il suo quadrato in parte copre il cerchio ma in parte sporge. Consideriamo tre di questi quadrati. Così facendo riusciamo a coprire i tre quarti del cerchio ma abbiamo tre sporgenze in più che chiamiamo A, B e C.

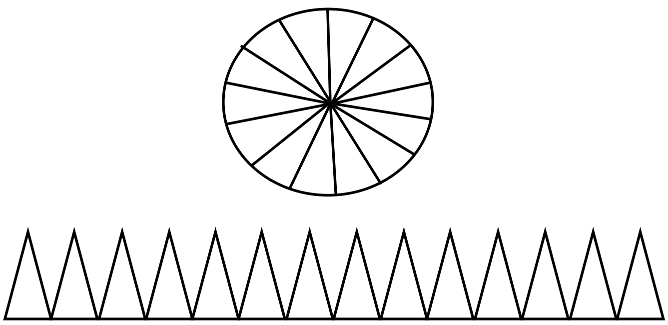


Possiamo allora spostare queste tre sporgenze e metterle a riempire tre porzioni – porzioni pressappoco triangolari - della parte del cerchio ancora non coperta da quadrati. Rimane tuttavia una strisciolina che vale "0,14 volte" un quadratino della nostra quadrettatura (poco più di una decima parte). L'area del cerchio vale allora 3 quadratini più lo 0,14 di un quadratino; in totale 3 + 0,14= 3,14 quadratini. Naturalmente ciascun quadratino ha area r^2 perché è costruito sul raggio r. Pertanto l'area del cerchio è:

area del cerchio = 3,14 r^2 = πr^2 ➔ ("pi greco erre quadro")

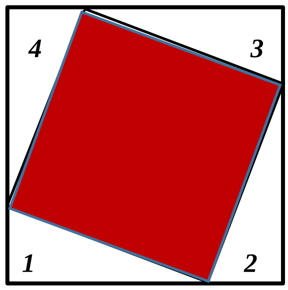
In un secondo modo, consideriamo il cerchio come un poligono con infiniti lati infinitesimi, cioè piccolissimi e, come fosse una torta, tagliamo delle porzioni molto sottili a raggiera. Immaginiamo di tagliarle – se occorre - sempre più sottili. Il bordo della circonferenza sia incollato ad un nastro adesivo, apriamo ora la raggiera in modo che il nastro si disponga lungo un segmento rettilineo su cui sono disposte le sottili fettine triangolari della "torta".
L'area complessiva di questi triangoli equivale all'area del cerchio così come per un poligono. Basta quindi moltiplicare la somma di tutte le basi (cioè la circonferenza $2\pi r$) per l'altezza h – che si può considerare anche come apotema "a" (cioè il raggio r=h=a) e dividere per 2 perché abbiamo a che fare on triangoli. (Archimede usò un poligono di 96 lati e trovò un *π=3,141 ... con tre cifre decimali esatte!*)

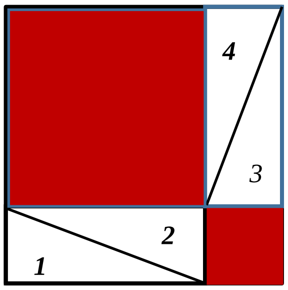
area del cerchio = circonferenza per apotema diviso due = $(2r\pi)(a)/2 = (2r\pi)(r)/2 = (2r^2\pi)/2 = \pi r^2$ ➔ ("pi greco erre quadro" ovvero "raggio per raggio per 3,14")



Naturalmente nel cerchio i triangoli hanno un lato curvilineo perché non sono abbastanza "piccoli" ma li possiamo ugualmente "approssimare" con un conveniente triangolo che tenga conto della curvatura. Comunque è lecito pensare di trattare con triangoli "abbastanza piccoli" da non poter più distinguere il segmento curvilineo della base da uno rettilineo.

(*) INGENUI MURATORI DIMOSTRANO IL GENIO PITAGORICO.





Ci sono varie dimostrazioni del teorema di Pitagora ma una delle più semplici e divertenti forse fu data da alcuni muratori che costruivano un pavimento.
Finito il lavoro s'accorsero che c'era un vistoso buco nel pavimento; mancava una mattonella di forma quadrata.
"Ci sono dei rimasugli di mattonelle di là" disse uno di loro.
"Bravo ma quelli sono solo ritagli, per giunta triangolari mentre il buco è quadrato perché manca la mattonella intera!" disse un altro.
"A questo punto bisogna ordinare una mattonella nuova... certo però ci vorrà tempo!"
"Intanto qualche ritaglio riempirà il buco più o meno!" insisteva il primo.
"Ecco guarda! Ne ho già presi quattro, i più belli sono questi, gli altri sono tutti più scheggiati"
Il primo prese i quattro pezzi e cercò di riempire il buco. Naturalmente erano ritagli per l'adattamento ai muri.
Ed ecco i quattro pezzi disposti ai quattro lati del quadrato.
"Ora il buco è più piccolo!" esclamò il primo soddisfatto.
"Sì è vero ma il buco però è storto!" (Il buso in figura è rosso).
"Proviamo a mettere i pezzi in un altro modo..."
I ritagli vennero risistemati in modo da presentare bordi paralleli ai contorni del buco e delle mattonelle.
"Per fortuna ci siamo riusciti! Il buco sfigura meno!" disse ancora il primo.
"Come no! ma stavolta i buchi sono due... anche se sono un po' più piccoli di prima!". Era lo scettico.
Uno che la sapeva lunga e se ne stava ad osservare taciturno la scena, sottovoce intervenne: "Ragazzi non fatevi illusioni! L'estensione del buco è uguale! Non avete fatto altro che dimostrare il teorema di Pitagora!"
"E sarebbe?"
"Sarebbe che il buco che risulta è sempre lo stesso, comunque giriate i ritagli: il buco della mattonella è quello che è e l'area dei ritagli è sempre la stessa, comunque li mettiate. Intendo che l'area vuota è sempre la stessa del buco grande meno i ritagli! Ma non cambia nulla! Questo è proprio il teorema di Pitagora!"
"Già, è vero! La parte vuota è la stessa comunque" esclamò il primo un po' deluso.
"Ma chi è questo Pitagora, non sarà mica quello della tavola pitagorica?"
"Proprio lui!"
"Certo che allora doveva essere un cervellone questo Pitagora!"
"Praticamente il buco quadro sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo – cioè il quadrato sul lato lungo di ogni ritaglio – equivale alla somma dei buchi quadrati sui cateti – cioè quelli con i lati corti dei quattro ritagli!" sussurrava il taciturno quasi parlando a sé stesso...

-------0-------

Nota. Il vantaggio di questa dimostrazione è che è semplice, divertente, si appoggia ad una favola possibile nella vita reale e, traendone forza, risulta praticamente indelebile nella memoria e anche più facile da applicare in pratica, proprio perché più semplice da ricavare al momento e quindi "ricordare". La storiella fa da intermediaria fra memoria e teorema. Psicologicamente gioca anche il fattore visivo poiché il quadrato dell'ipotenusa si presenta inclinato e diversamente dalla coppia di quadrati relativi ai cateti. Ciò suggerisce una relazione di separazione ma anche un'equivalenza quadratica fra ipotenusa e cateti. Una dimostrazione non dovrebbe mai appesantire la mente ma essere sempre la più semplice possibile. Raccontare e ricordare una storiella può essere più facile per ricordare il teorema piuttosto che enunciarlo direttamente come un dogma. La storiella inoltre mostra e usa una caratteristica essenziale dell'intelligenza: trovare ciò che si mantiene costante – cioè l'essenza – in ciò che appare mutevole, variabile. Nel teorema, i lati e le forme dei quadrati variano, ma si scova che esiste una misura d'area che invece rimane costante, uguale a sé stessa, cui si può fare riferimento e usare - se servisse - come appiglio.